Aufgabe 7: Interpolation von Funktionen

Bei der Interpolation geht es darum zu Daten (Messwerten) eine stetige Funktion zu finden, die diese Daten genau abbildet. Wogegen die Approximation die Daten nur annähert. Es gibt zwei verschiedene Interpolationsverfahren, das Newton'sche und das Lagrange'sche. Hier wird nur letzteres genauer angeschaut.

Wir haben (n+1) Punkte, P_0, P_1, …., P_n bzw. (x_0, y_0), (x_1, y_1), …, (x_n, y_n), für die wir eine Funktion suchen.

Wir verwenden $f_{n(x)=\sum_0^n L_i(x)f(x_i)}$, wobei $f(x_i)$ dem y-Wert der Punkte entspricht. $L_i(x)$ entspricht in etwa einer Basisfunktion der einzelnen Punkte (L für Lagrange). Um diese Basisfunktionen herauszufinden wird folgendes gerechnet:

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{n} \frac{x-x_j}{x_{i-}x_j} \qquad L_j(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots\ldots(x-x_n)}$$

Wobei j ≠ i sei. Sonst wäre (x_j-x_i) an der Stelle j=i 0. → Nenner wäre 0

<u>Beispiel</u>

$P_0(1,2)$ $P_1(2,3)$ $P_2(3,1)$ $P_3(4,3)$

L_0 bis L_3 berechnen

$$L_0 = \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} = -\frac{1}{6}\,(x^3-9x^2+26x+6)$$

X_0 wird jetzt hier nicht verwendet. Kein (x-1) im Zähler & (1-1) im Nenner.

$$L_1 = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} = \frac{1}{2}(x^3-8x^2+19x-12)$$

$$L_2 = \cdots = -\frac{1}{2}(x^3-7x^2+14x-8)$$

$$L_3 = \cdots = \frac{1}{6}(x^3-6x^2+11x+6)$$

$$f_3(x) = \sum_{i=1}^{3} L_i(x)f(x_i) = L_0y_0 + L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3 = 2L_0 + 3L_1 + 1L_2 + 3L_3$$

$$= \frac{1}{6}(7x^3-51x^2+110x-54)$$

Eine Anwendung der Interpolation ist beispielweise die Skalierung von Bildern in der Computergrafik.

Aufgaben:

(a) Die höchste Potenz welche im Interpolationspolynom ist eins kleiner als die Anzahl der zu interpolierenden Punkte, da im Basispolynom immer der j-te Faktor weggelassen wird.

(b) Das Interpolationspolynom ist nur eine Näherungsfunktion, welche an den Interpolationsstellen den genauen wert annimmt. Zwischen den Interpolationsstellen kann die zugrundeliegende Funktion zum Beispiel Polstellen haben oder unsere Interpolationsfunktion hat zu viele Stützstellen und es kommt zu einer Oszillation um diese herum(Runges Phänomen).

(c) Das ableiten einer solchen Funktion gestaltet sich relativ einfach. Entweder hat man die Funktion bereits in der Normalform so muss man nur jeden Term einzeln ableiten. Hat man jedoch noch die Form wie es direkt aus der Summe kommt so kann man die Ableitung wie folgt berechnen:

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \left(f(x_j) \sum_{\mathrm{i=1,i\neq j}}^{n} \left(\frac{1}{(x_j - x_i)} \prod_{p=1,p\neq i,p\neq j}^{n} \frac{(x - x_p)}{(x_j - x_p)} \right) \right)$$

<u>Quellen bzw Hilfen</u>

https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik-abitur/artikel/newtonsches-und-lagrangesches-interpolationsverfahren

https://www.youtube.com/watch?v=_zK_KhHW6og