## 7.1. Additionstheoreme

**(a)** Die Reihe $\operatorname{Exp}(z)$ konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ und damit insbesondere absolut. Die Summanden dürfen also umsortiert werden und es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Exp}(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2\ell}}{(2\ell)!} + \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell x^{2\ell}}{(2\ell)!} + i \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^\ell x^{2\ell+1}}{(2\ell+1)!} = \operatorname{Cos}(x) + i \operatorname{Sin}(x).\end{aligned}$$

Da in $\operatorname{Cos}(x)$ nur gerade Potenzen von $x$ summiert werden, gilt $\operatorname{Cos}(-x) = \operatorname{Cos}(x)$. Da in $\operatorname{Sin}(x)$ nur ungerade Potenzen von $x$ summiert werden, gilt $\operatorname{Sin}(-x) = -\operatorname{Sin}(x)$. Die zu zeigenden Formeln folgen aus

$$\begin{aligned}\operatorname{Exp}(ix) + \operatorname{Exp}(-ix) &= \operatorname{Cos}(x) + i \operatorname{Sin}(x) + \operatorname{Cos}(-x) + i \operatorname{Sin}(-x) = 2 \operatorname{Cos}(x), \\ \operatorname{Exp}(ix) - \operatorname{Exp}(-ix) &= \operatorname{Cos}(x) + i \operatorname{Sin}(x) - \operatorname{Cos}(-x) - i \operatorname{Sin}(-x) = 2i \operatorname{Sin}(x).\end{aligned}$$

**(b)** Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Exp}\Big(i(x+y)\Big) &= \operatorname{Exp}(ix) \operatorname{Exp}(iy) = \Big(\operatorname{Cos}(x) + i \operatorname{Sin}(x)\Big)\Big(\operatorname{Cos}(y) + i \operatorname{Sin}(y)\Big) \\ &= \operatorname{Cos}(x) \operatorname{Cos}(y) - \operatorname{Sin}(x) \operatorname{Sin}(y) + i\Big(\operatorname{Sin}(x) \operatorname{Cos}(y) + \operatorname{Cos}(x) \operatorname{Sin}(y)\Big).\end{aligned}$$

Mit (a) folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos}(x+y) &= \operatorname{Re}\Big(\operatorname{Exp}\Big(i(x+y)\Big)\Big) = \operatorname{Cos}(x) \operatorname{Cos}(y) - \operatorname{Sin}(x) \operatorname{Sin}(y), \\ \operatorname{Sin}(x+y) &= \operatorname{Im}\Big(\operatorname{Exp}\Big(i(x+y)\Big)\Big) = \operatorname{Sin}(x) \operatorname{Cos}(y) + \operatorname{Cos}(x) \operatorname{Sin}(y).\end{aligned}$$

**(c)** Mithilfe des Additionstheorems aus (b) und den Symmetrien aus (a) zeigen wir

$$\begin{aligned}1 = \operatorname{Cos}(0) = \operatorname{Cos}(x-x) &= \operatorname{Cos}(x) \operatorname{Cos}(-x) - \operatorname{Sin}(x) \operatorname{Sin}(-x) \\ &= \operatorname{Cos}(x)^2 + \operatorname{Sin}(x)^2.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{Cos}(3x) &= \operatorname{Re}\Big(\operatorname{Exp}(3ix)\Big) = \operatorname{Re}\Big(\operatorname{Exp}(ix)^3\Big) = \operatorname{Re}\Big((\operatorname{Cos}(x) + i \operatorname{Sin}(x))^3\Big) \\ &= \operatorname{Re}\Big(\operatorname{Cos}(x)^3 + 3i \operatorname{Cos}(x)^2 \operatorname{Sin}(x) - 3 \operatorname{Cos}(x) \operatorname{Sin}(x)^2 - i \operatorname{Sin}(x)^3\Big) \\ &= \operatorname{Cos}(x)^3 - 3 \operatorname{Cos}(x) \operatorname{Sin}(x)^2 = \operatorname{Cos}(x)^3 - 3 \operatorname{Cos}(x)\Big(1 - \operatorname{Cos}(x)^2\Big) \\ &= 4 \operatorname{Cos}(x)^3 - 3 \operatorname{Cos}(x).\end{aligned}$$

**7.2. Verhalten von Sin** Wir erinnern an die Definition der Potenzreihe

$$\operatorname{Sin}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

**(a)** Es gilt

$$\begin{aligned} x - \operatorname{Sin}(x) &= x - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \left( \frac{x^{2(2\ell-1)+1}}{(2(2\ell-1)+1)!} - \frac{x^{2(2\ell)+1}}{(2(2\ell)+1)!} \right) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \left( \frac{x^{4\ell-1}}{(4\ell-1)!} - \frac{x^{4\ell+1}}{(4\ell+1)!} \right). \end{aligned}$$

Für alle $x \in [0,1]$ und alle $\ell \in \mathbb{N}$ gilt $x^{4\ell-1} \geq x^{4\ell+1}$. Daher ist auch $\frac{x^{4\ell-1}}{(4\ell-1)!} \geq \frac{x^{4\ell+1}}{(4\ell+1)!}$, woraus die Behauptung $x - \operatorname{Sin}(x) \geq 0$ folgt.

**(b)** Wir zeigen $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{Sin}(x)}{x} = 1$. Es gilt

$$\frac{\operatorname{Sin}(x)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!}.$$

Die Behauptung folgt, da für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$ (diese genügen für $x \to 0$) gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} \right| \leq |x|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{x^{2k-2}}{(2k+1)!} \right| \leq |x|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \leq |x|^2 \operatorname{Exp}(1) \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

Analog zeigen wir $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\operatorname{Sin}(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$. Mit $(2+1)! = 6$ berechnen wir zunächst

$$\frac{x - \operatorname{Sin}(x)}{x^3} = \frac{1}{x^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-2}}{(2k+1)!} = \frac{1}{6} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-2}}{(2k+1)!}$$

Wie oben lässt sich $x^2$ ausklammern, denn $2k-2 \geq 2$ für $k \geq 2$. Falls $|x| \leq 1$ folgt

$$\left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k-2}}{(2k+1)!} \right| \leq |x|^2 \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{x^{2k-4}}{(2k+1)!} \right| \leq |x|^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \leq |x|^2 \operatorname{Exp}(1) \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

Wir behaupten $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{Exp}(x)-1}{x} = 1$. Dann folgt nämlich

$$\lim_{x\to 0} \left( \frac{x - \operatorname{Sin}(x)}{x^2 \operatorname{Exp}(x) - x^2} \right) = \lim_{x\to 0} \left( \frac{x - \operatorname{Sin}(x)}{x^3} \cdot \frac{1}{\frac{\operatorname{Exp}(x)-1}{x}} \right) = \frac{1}{6}.$$

In der Tat ist wie bisher für $|x| \leq 1$

$$\frac{\operatorname{Exp}(x) - 1}{x} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!},$$

$$\left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!} \right| \leq |x| \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{x^{k-2}}{k!} \right| \leq |x| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq |x| \operatorname{Exp}(1) \xrightarrow{x\to 0} 0.$$

### 7.3. stetige Funktionen

**(a)** Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist monoton wachsend. Daher existieren für jedes $x_0 \in ]0, \infty[$ die links- und rechtsseitigen Grenzwerte

$$\ell = \lim_{x_0 > x \to x_0} f(x), \qquad r = \lim_{x_0 < x \to x_0} f(x).$$

Aus den Grenzwertsätzen folgt, dass $r$ und $\ell$ beide die Gleichung $y^2 = x_0$ erfüllen:

$$\ell^2 = \Big(\lim_{x_0 > x \to x_0} f(x)\Big)\Big(\lim_{x_0 > x \to x_0} f(x)\Big) = \lim_{x_0 > x \to x_0} \Big(f(x)\Big)^2 = \lim_{x_0 > x \to x_0} x = x_0,$$
$$r^2 = \Big(\lim_{x_0 < x \to x_0} f(x)\Big)\Big(\lim_{x_0 < x \to x_0} f(x)\Big) = \lim_{x_0 < x \to x_0} \Big(f(x)\Big)^2 = \lim_{x_0 < x \to x_0} x = x_0.$$

Lösungen $y \geq 0$ der Gleichung $y^2 = x_0$ sind jedoch eine eindeutig. Daher gilt $\ell = r$ und $f$ ist stetig in $]0, \infty[$. Im Fall $x_0 = 0$ ist der linksseitige Grenzwert nicht definiert und wir betrachten nur den rechtsseitigen Grenzwert $r = \lim_{0 < x \to 0} f(x)$. Dieser erfüllt dann die Gleichung $r^2 = 0$ und es folgt $r = 0 = f(0)$. Somit ist $f$ stetig in $[0, \infty[$.

**(b)** Damit $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ wohldefiniert ist, muss gelten $\forall x \in [2,4] : 2rx - x^2 \geq 0$. Dies ist äquivalent zu $\forall x \in [2,4] : 2r > x$. Notwendige Bedingung ist also $2r \geq 4$, das heisst, $r \geq 2$. Aus (a) folgt, dass $f$ auf $[0,4] \setminus \{2\}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig ist. Die Bedingung für Stetigkeit auf $[0,4]$ ist daher

$$\lim_{2 > x \to 2} f(x) = f(2) = \lim_{2 < x \to 2} f(x).$$

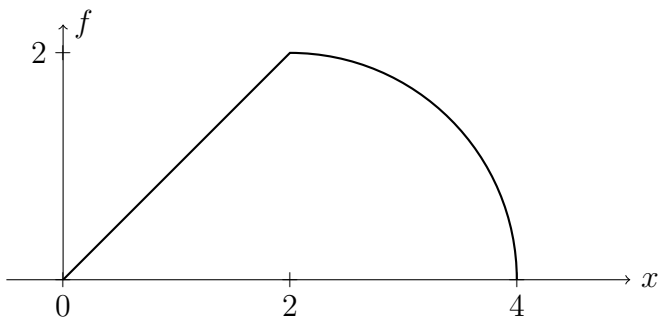
Es gilt

$$\lim_{2 > x \to 2} f(x) = \lim_{2 > x \to 2} 2x\, r^{-1} = 4r^{-1},$$
$$\lim_{2 < x \to 2} f(x) = \lim_{2 < x \to 2} \sqrt{2rx - x^2} = \sqrt{4r - 4} = 2\sqrt{r-1}.$$

Die Bedinung lautet also $4r^{-1} = 2\sqrt{r-1}$. Wegen $r \geq 2$ ist dies äquivalent zu $4 = r^2(r-1)$. Wir sehen, dass $r = 2$ die eine gültige Lösung ist. Somit ist $f$ stetig für $r = 2$. Um den Graphen von $f$ zu zeichnen, beobachten wir, dass der Graph von

$$\sqrt{2rx - x^2} = \sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{r^2 - (x-r)^2}$$

Teil des Kreises mit Radius $r$ um den Punkt $(r, 0) \in \mathbb{R}^2$ ist. Für $r = 2$ erhalten wir:



**7.4. Linker und rechter Grenzwert** Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ gilt

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 2ax - a}{|x-a| + |x^2 - a^2|} = \frac{x - a + 2x(x-a)}{|x-a| + |(x-a)(x+a)|} = \frac{(x-a)(1+2x)}{|x-a|\Big(1 + |x+a|\Big)}.$$

Für $x > a$ ist $|x-a| = (x-a)$. Daher gilt

$$\lim_{a>x\to a} f(x) = \lim_{a>x\to a} \frac{1+2x}{1+|x+a|} = \frac{1+2a}{1+|2a|} = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \geq 0, \\ \frac{1+2a}{1-2a}, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Für $x < a$ ist $|x-a| = -(x-a)$. Somit gilt

$$\lim_{a<x\to a} f(x) = \lim_{a>x\to a} -\frac{1+2x}{1+|x+a|} = -\frac{1+2a}{1+|2a|} = \begin{cases} -1, & \text{falls } a \geq 0, \\ -\frac{1+2a}{1-2a}, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Im Fall $a \geq 0$ sehen wir sofort, dass $f$ an $x_0 = a$ nicht stetig ergänzbar ist.

Im Fall $a < 0$ ist $f$ an $x_0 = a$ stetig ergänzbar, falls links- und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen, das heisst, falls $\frac{1+2a}{1-2a} = -\frac{1+2a}{1-2a}$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\frac{1+2a}{1-2a} = 0$, also falls $a = -\frac{1}{2}$.

**7.5. Stetigkeit** Wir behaupten, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

nicht stetig im Punkt $(0,0)$ ist. Dazu konstruieren wir eine Folge $(x_n, y_n) \to (0,0)$, so dass $f(x_n, y_n)$ nicht gegen $f(0,0) = 0$ konvergiert. Sei $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ für $n \in \mathbb{N}$. In der Tat gilt $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$ für $n \to \infty$ aber

$$f(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \nrightarrow 0 = f(0,0).$$

Dagegen ist die Funktion

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

überall stetig. In $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist $g$ stetig als Komposition stetiger Funktionen. Wir betrachten daher eine beliebige Folge $(x_n, y_n)$ mit Grenzwert $(0,0)$ und berechnen

$$\Big|f(x_n, y_n)\Big| = \left|\frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}\right| \leq |x_n| \left|\frac{y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}\right| \leq |x_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

(Man beachte, dass die letzte Abschätzung bei der Funktion $f$ nicht funktioniert.)