11.1. Kettenregel

(a) $f(x) = \log\Big(\frac{1}{x}(1+\sqrt{1-x^2})\Big)$ ist definiert, falls das Argument der Wurzel ≥ 0 und das Argument des Logarithmus > 0 ist. Somit muss $x^2 \leq 1$ und $\frac{1}{x} > 0$ gelten. Folglich ist f definiert auf $D_0 =]0,1]$. Auf $D_1 =]0,1[$ ist das Argument der Wurzel strikt positiv. Somit ist f auf D_1 differenzierbar als Komposition differenzierbarer Funktionen. Für $x \in D_1$ folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} - (1+\sqrt{1-x^2})}{x^2} \\ &= \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\sqrt{1-x^2}+1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2} \\ &= \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-\sqrt{1-x^2}-1}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \sqrt[3]{\log(\tan x)}$ ist definiert, falls $\tan x$ positiv ist, denn die dritte Wurzel ist definiert auf ganz $\mathbb{R}$ und der Logarithmus für positive Argumente. Der Tangens ist π-periodisch und positiv auf $]0, \frac{\pi}{2}[$. Der Definitionsbereich von f ist somit

$$D_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n\pi, n\pi + \tfrac{\pi}{2}[\,.$$

f ist differenzierbar, falls das Argument der Wurzel ungleich 0 ist. Die Bedingung dafür ist $\tan(x) \neq 1$. Der Definitionsbereich von f' ist somit

$$D_1 = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \Big(]n\pi, n\pi + \tfrac{\pi}{2}[\setminus \{\tfrac{\pi}{4} + n\pi\}\Big)$$

Wir verwenden $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ und $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ und berechnen für $x \in D_1$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(\log\tan x)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{(\log\tan x)^{-\frac{2}{3}}}{3\sin(x)\cos(x)}.$$

(c) $f(x) = (x^x)^x = \exp(x^2\log x)$ ist definiert für $x > 0$, also auf $D_0 =]0,\infty[$ und differenzierbar auf $D_1 = D_0$ als Komposition differenzierbarer Funktionen. Es gilt

$$f'(x) = \exp(x^2\log x)\Big(\tfrac{x^2}{x} + 2x\log x\Big) = (x + 2x\log x)(x^x)^x.$$

(d) $h(x) := x^x = \exp(x\log x)$ und $f(x) = x^{(x^x)} = \exp(h(x)\log x)$ sind definiert auf $D_0 =]0,\infty[$ und differenzierbar auf $D_1 = D_0$. Es gilt

$$\begin{aligned} h'(x) &= \exp(x\log x)\Big(1+\log x\Big) \\ f'(x) &= \exp\Big(h(x)\log x\Big)\Big(\tfrac{h(x)}{x} + h'(x)\log x\Big) = x^{(x^x)}\Big(x^{x-1} + x^x(1+\log x)\log x\Big). \end{aligned}$$

11.2. Zum Mittelwertsatz

(a) Sei $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) \geq 1$ und $f'(x) \geq -1$. Zu zeigen ist $f(x) \geq 1 - x$ für alle $x \in [0,\pi]$.

Die Behauptung an der Stelle $x = 0$ folgt aus der Annahme $f(0) \geq 1$. Sei daher $x \in]0,\pi]$ beliebig. Gemäss Mittelwertsatz existiert $\xi \in]0,x[$ mit

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=1} + \underbrace{f'(\xi)}_{\geq -1}(x-0) \geq 1 - x.$$

Die Funktion f muss nicht monoton sein: $f(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$ erfüllt die Voraussetzungen $f(0) = 1 \geq 1$ und $f'(x) = -\sin(2x) \geq -1$, ist aber nicht monoton in $[0,\pi]$, da $f(0) = 1 = f(\pi)$ und $f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

(b) Die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$ ist differenzierbar für $x > -1$ und für $x > 0$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} < \frac{1}{2}.$$

Daher folgt $f(x) \leq f(0) + \frac{1}{2}(x-0) = 1 + \frac{x}{2}$ für $x > 0$ aus dem Mittelwertsatz.

(c) Gemäss Mittelwertsatz existiert für jedes Paar $x < y$ ein $\xi \in]x,y[$ mit

$$\frac{e^y - e^x}{y - x} = e^\xi.$$

Da die Exponentialfunktion streng monoton wächst, gilt $e^x < e^\xi < e^y$. Nach Multiplikation mit $(y-x) > 0$ erhalten wir wegen $e^\xi(y-x) = e^y - e^x$ wie behauptet

$$e^x(y-x) < e^y - e^x < e^y(y-x).$$

(d) Es gilt $\log(1) = 0$, das heisst, $1 - \frac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1$ gilt für $x = 1$.

Falls $0 < x < 1$ existiert gemäss Mittelwertsatz $\xi \in]x,1[$ mit $\log(1) = \log(x) + \frac{1}{\xi}(1-x)$. Da $\log(1) = 0$ und $\frac{1}{\xi} > 1$ folgt $\log(x) = -\frac{1}{\xi}(1-x) \leq -(1-x) = x - 1$.

Falls $x > 1$ existiert gemäss Mittelwertsatz $\xi \in]1,x[$ mit $\log(x) = \log(1) + \frac{1}{\xi}(x-1)$. In diesem Fall ist $\frac{1}{\xi} < 1$ und es folgt ebenfalls $\log(x) \leq x - 1$. Somit gilt $\log(x) \leq x - 1$ für alle $x > 0$. Daraus folgt wiederum

$$-\log(x) = \log(\tfrac{1}{x}) \leq \tfrac{1}{x} - 1,$$

also $\log(x) \geq 1 - \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$ und es folgt die die Behauptung

$$1 - \tfrac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1 \qquad \forall x > 0.$$

11.3. Zum Umkehrsatz Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \left]-\tfrac{\pi}{2}, \infty\right[\\ x &\mapsto e^x + \arctan x. \end{aligned}$$

ist differenzierbar als Summe differenzierbarer Funktionen. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{1+x^2} > 0.$$

Ferner gilt

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}, \qquad\qquad f(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty.$$

Aus dem Umkehrsatz folgt, dass f bijektiv ist mit differenzierbarer Umkehrfunktion. Schliesslich gilt $f(0) = 1$, das heisst, $f^{-1}(1) = 0$ und

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

Bemerkung. Wir sehen, dass wir $(f^{-1})'(1)$ berechnen können ohne die gesamte Funktionsvorschrift von f^{-1} zu kennen: Ist $f'(x)$ bekannt, so genügt der eine Wert $f^{-1}(1)$.

11.4. Mit l'Hôpital

(a) $f(x) = e^x \sin x$ ist differenzierbar und verschwindet an der Stelle $a = 0$. Selbiges gilt für $g(x) = x$, ausserdem ist $g'(x) = 1 \neq 0$. Somit gilt nach Bernoulli–de l'Hôpital

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{e^x \sin x}{x} = \lim_{x\searrow 0}\Big(e^x \sin x + e^x \cos x\Big) = 1.$$

(b) Dank Stetigkeit der Quadratwurzel und wegen $x > 0$ gilt

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \sqrt{\lim_{x\searrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\searrow 0} \frac{\sin x}{2x}} = \sqrt{\lim_{x\searrow 0} \frac{\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Der Satz von Bernoulli–de l'Hôpital ist zweimal anwendbar, denn $1 - \cos x$ und x^2 sowie $\sin x$ und $2x$ sind differenzierbar und verschwinden an der Stelle $x = 0$.

(c) Es gilt $\sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(3\frac{\pi}{2}) = 1 - 1 = 0$ aber $\cos(2\frac{\pi}{2}) = \cos\pi = -1$. Daher folgt

$$\lim_{x\searrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + \sin(3x)}{\cos(2x)} = 0.$$

(d) Es gilt $\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{\sin x-e^x+1}{(e^x-1)\sin x}$.

Zähler $f(x)=\sin x-e^x+1$ und Nenner $g(x)=(e^x-1)\sin x$ sind beliebig oft differenzierbar und verschwinden beide bei $x=0$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\cos x-e^x, & f'(0)&=1-1=0,\\
g'(x)&=e^x\sin x+(e^x-1)\cos x, & g'(0)&=0+1-1=0,\\
f''(x)&=-\sin x-e^x, & f''(0)&=0-1=-1,\\
g''(x)&=e^x\sin x+2e^x\cos x-(e^x-1)\sin x, & g''(0)&=0+2-0=2.
\end{aligned}$$

Der Satz von Bernoulli–de l'Hôpital ist also zweimal anwendbar und es folgt

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-1}{2}.$$

(e) Gemäss Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\searrow 0}\sqrt[x]{1+x}&=\lim_{x\searrow 0}\exp\Big(\tfrac{1}{x}\log(1+x)\Big)=\exp\Big(\lim_{x\searrow 0}\frac{\log(1+x)}{x}\Big)\\
&=\exp\Big(\lim_{x\searrow 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}\Big)=\exp(1)=e.
\end{aligned}$$

Der Satz von Bernoulli–de l'Hôpital ist in der zweiten Zeile anwendbar, da $f(x)=\log(1+x)$ und $g(x)=x$ beide für $x\geq 0$ differenzierbar sind und $f(0)=0=g(0)$ gilt.

(f) Es gilt $\dfrac{1}{x}\Big(\dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{x}\Big)=\dfrac{x-\sin x}{x^2\sin x}$.

Zähler $f(x)=x-\sin x$ und Nenner $g(x)=x^2\sin x$ sind beliebig oft differenzierbar und verschwinden beide bei $x=0$. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
f'(x)&=1-\cos x, & f'(0)&=1-1=0,\\
g'(x)&=2x\sin x+x^2\cos x, & g'(0)&=0+0=0,\\
f''(x)&=\sin x, & f''(0)&=0,\\
g''(x)&=2\sin x+4x\cos x-x^2\sin x, & g''(0)&=0,\\
f'''(x)&=\cos x, & f'''(0)&=1\\
g'''(x)&=6\cos x-6x\sin x-x^2\cos x, & g'''(0)&=6.
\end{aligned}$$

Der Satz von Bernoulli–de l'Hôpital ist somit dreimal anwendbar und es folgt

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{6}.$$