13.1. Einfache Lösungen

$f(x) = \frac{1}{x}$ löst die Gleichung $f' = -f^2$, denn $f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -(f(x))^2$.

$g(x) = \log(x)$ löst die Gleichung $g = e^{-g}$, denn $g'(x) = x^{-1} = e^{-\log x} = e^{-g}$.

$h(x) = 0$ ist die triviale Lösung der Gleichung $h'(x) = \sin(h)$, denn $h' = 0 = \sin(0)$.

13.2. Lösen durch Ansatz Als Ansatz für eine Lösung der Differentialgleichung

$$f''(x) + 7f'(x) - 2f(x) = x^2 + 1.$$

verwenden wir ein allgemeines Polynoms zweiten Grades, also

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c, \\ f'(x) &= 2ax + b, \\ f''(x) &= 2a. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Gleichung erhalten wir die Bedingung

$$2a + 7(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = x^2 + 1.$$

Wir fassen gleiche Potenzen von x zusammen und erhalten

$$-2ax^2 + (14a - 2b)x + (2a + 7b - 2c) = x^2 + 1.$$

Die jeweiligen Potenzen von x müssen links und rechts übereinstimmen: Ein Koeffizientenvergleich führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2a = 1 \quad &\Rightarrow \quad a = -\tfrac{1}{2} \\ 14a - 2b = 0 \quad &\Rightarrow \quad b = 7a = -\tfrac{7}{2} \\ 2a + 7b - 2c = 1 \quad &\Rightarrow \quad c = \tfrac{1}{2}(2a + 7b - 1) = \tfrac{1}{2}(-1 - \tfrac{49}{2} - 1) = -\tfrac{53}{4}. \end{aligned}$$

Das heisst, eine Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$f(x) = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{7}{2}x - \tfrac{53}{4}.$$

Probe. Es gilt $f'(x) = -x - \frac{7}{2}$ und $f''(x) = -1$, also

$$\begin{aligned} -2f(x) &= x^2 + 7x + \tfrac{53}{2} \\ 7f'(x) &= -7x - \tfrac{49}{2} \\ f''(x) &= -\tfrac{2}{2} \end{aligned}$$

Addiert ergibt dies $x^2 + 1$, die Lösung ist also korrekt.

13.3. System linearer Differentialgleichungen Das System ist gegeben durch

$$\dot{F} = AF, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \qquad F(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

(a) $F(t) = \operatorname{Exp}(At) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ ist die Lösung zu den gegebenen Anfangsdaten. Es gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 \cdot 2 - 4) & (-2 + 2) \\ (4 \cdot 2 - 2 \cdot 4) & (-4 + 2 \cdot 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine solche Matrix A mit $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ heisst *nilpotent*. Demnach verschwinden auch alle höheren Potenzen von A, und es gilt

$$\operatorname{Exp}(tA) = I + tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2t & -t \\ 4t & 1 - 2t \end{pmatrix}.$$

Somit folgt

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 + 2t & -t \\ 4t & 1 - 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + t \\ 5 + 2t \end{pmatrix}$$

und wir erhalten die Lösungen $f(t) = 3 + t$ und $g(t) = 5 + 2t$.

Probe. Die Lösung ist korrekt, denn $f(0) = 3$ und $g(0) = 5$, sowie

$$\begin{aligned} 2f - g &= 6 + 2t - 5 - 2t = 1 = \dot{f}, \\ 4f - 2g &= 12 + 4t - 10 - 4t = 2 = \dot{g}. \end{aligned}$$

(b) Die Lösung für allgemeine Anfangswerte $a, b \in \mathbb{R}$ lautet

$$\operatorname{Exp}(tA) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2t & -t \\ 4t & 1 - 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2at - bt \\ 4at + b - 2bt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + (2a - b)t \\ b + (4a - 2b)t \end{pmatrix}$$

und wir sehen, dass die Lösung konstant ist (also unabhängig von t), falls $b = 2a$.

13.4. Charakteristisches Polynom

(a) Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

$$0 = f^{(4)} + 2f^{(2)} + f$$

ist

$$p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = \left(\lambda^2 + 1\right)^2 = (\lambda - i)^2(\lambda + i)^2$$

mit (doppelten) Nullstellen $\lambda_1 = i = \lambda_2$ und $\lambda_3 = -i = \lambda_4$. Gemäss Satz 5.6.3. ist die allgemeine Lösung $f(t)$ der Differentialgleichung eine Linearkombination aus

$$e^{it}, \qquad te^{it}, \qquad e^{-it}, \qquad te^{-it}$$

oder äquivalent dazu, da f eine reelle Funktion sein soll und $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ sowie $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ gilt, eine Linearkombination der Funktionen

$$\sin(t), \qquad t\sin(t), \qquad \cos(t), \qquad t\cos(t).$$

Wir erhalten

$$f(t) = c_1 \sin(t) + c_2\, t\sin(t) + c_3 \cos(t) + c_4\, t\cos(t), \qquad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

(b) Um die Lösung $f(t)$ zu den Anfangsbedingungen

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 1$$

zu finden, berechnen wir zunächst $0 = f(0) = c_3$. Mit $c_3 = 0$ verbleibt

$$\begin{aligned}
f(t) &= c_1 \sin(t) + c_2\, t\sin(t) + c_4\, t\cos(t),\\
f'(t) &= c_1 \cos(t) + c_2\Big(\sin(t) + t\cos(t)\Big) + c_4\Big(\cos(t) - t\sin(t)\Big),\\
f''(t) &= -c_1 \sin(t) + c_2\Big(2\cos(t) - t\sin(t)\Big) + c_4\Big(-2\sin(t) - t\cos(t)\Big).
\end{aligned}$$

Als nächstes berechnen wir $0 = f'(0) = c_1 + c_4$ und $0 = f''(0) = 2c_2$. Mit $c_2 = 0$ verbleibt für die dritte Ableitung

$$f'''(t) = -c_1 \cos(t) + c_4\Big(-3\cos(t) + t\sin(t)\Big)$$

und wir erhalten $1 = f'''(0) = -c_1 - 3c_4$. Addition der Gleichungen für c_1 und c_4 ergibt $1 = -2c_4$, also $c_4 = -\frac{1}{2}$ und damit $c_1 = \frac{1}{2}$. Die gesuchte Lösung lautet somit

$$f(t) = \tfrac{1}{2}\sin(t) - \tfrac{t}{2}\cos(t).$$

Probe. Es gilt $f(0) = 0$ wie gewünscht. Ferner gilt

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \tfrac{1}{2}\cos(t) - \tfrac{1}{2}\cos(t) + \tfrac{t}{2}\sin(t) = \tfrac{t}{2}\sin(t), & f'(0) &= 0,\\
f''(t) &= \tfrac{1}{2}\sin(t) + \tfrac{t}{2}\cos(t), & f''(0) &= 0,\\
f'''(t) &= \cos(t) - \tfrac{t}{2}\sin(t), & f'''(0) &= 1,\\
f''''(t) &= -\sin(t) - \tfrac{1}{2}\sin(t) - \tfrac{t}{2}\cos(t).
\end{aligned}$$

Die Lösung ist korrekt, denn die Anfangswerte stimmen und die Gleichung

$$\begin{aligned}
f^{(4)}(t) + 2f^{(2)}(t) + f(t) = &-\sin(t) - \tfrac{1}{2}\sin(t) - \tfrac{t}{2}\cos(t)\\
&+ \sin(t) + t\cos(t)\\
&+ \tfrac{1}{2}\sin(t) - \tfrac{t}{2}\cos(t) = 0
\end{aligned}$$

ist erfüllt.

13.5. Entropie Für $x > 0$ ist $\varphi(x)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x \log x,\\ \varphi'(x) &= 1 + \log x,\\ \varphi''(x) &= \tfrac{1}{x} > 0.\end{aligned}$$

(a) Aus $\varphi''(x) > 0$ für $x > 0$ folgt, dass φ in $]0, \infty[$ konvex ist. Um die Aussage auf $[0, \infty[$ auszuweiten, betrachten wir $x_0 = 0 < x_1$ und berechnen für $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\varphi\Big(tx_1 + (1-t)x_0\Big) = \varphi(tx_1) &= tx_1 \log(tx_1)\\ &\le tx_1 \log(x_1) = t\varphi(x_1) = t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_0).\end{aligned}$$

Die Funktion φ ist somit in ganz $[0, \infty[$ konvex. Es gilt $\varphi'(x) = 1 + \log x = 0$ genau dann, wenn $x = e^{-1}$. Da $\varphi(e^{-1}) = -e^{-1} < 0 = \varphi(0)$ und $\varphi(x) \to \infty$ für $x \to \infty$, ist $x = e^{-1}$ die eindeutige Minimalstelle von φ.

(b) Die Projektionen $\pi_k \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(p_1, \ldots, p_n) \mapsto p_k$ sind stetig. Sie bleiben stetig, wenn wir sie auf $D := \{(p_1, \ldots, p_n) \in [0, 1]^n;\ p_1 + \ldots + p_n = 1\}$ einschränken. Somit ist die Entropie

$$H = -\sum_{k=1}^{n} \varphi \circ \pi_k|_D$$

eine Komposition stetiger Funktionen und somit stetig. Ausserdem ist $f := \pi_1 + \ldots + \pi_n$ eine stetige Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Folglich ist $f^{-1}(\{1\})$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$, da f stetig und $\{1\}$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$ ist. Schliesslich ist $D = [0, 1]^n \cap f^{-1}(\{1\})$ abgeschlossen als Schnitt abgeschlossener Mengen. Ferner ist D beschränkt in der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ durch 1. Folglich ist $D \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und abgeschlossen, also kompakt. Als stetige Funktion auf einer kompakten Menge nimmt H ihr Maximum an.

(c) Sei $q = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) \in D$. Dann gilt $H(q) = -n \cdot \frac{1}{n} \log(\frac{1}{n}) = \log n$.

Sei $p = (p_1, \ldots, p_n) \in D$ beliebig. Aus der Ungleichung von Jensen und der Bedingung $p_1 + \ldots + p_n = 1$ folgt

$$H(p) = -\sum_{k=1}^{n} \varphi(p_k) = -n \sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{n}\varphi(p_k) \le -n\,\varphi\Big(\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{n} p_k\Big) = -n\,\varphi(\tfrac{1}{n}) = H(q).$$

Die Ungleichung von Jensen ist anwendbar, da φ eine konvexe Funktion ist. (Man beachte aber das Vorzeichen.) Folglich ist $H(q)$ der maximale Wert von H auf D.