14.1. Lösungsschar Die homogene Differentialgleichung $f'' + 2qf' + (q+q^2)f = 0$ hat charakteristisches Polynom $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 2q\lambda + (q+q^2)$. Dessen Nullstellen sind

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4(q+q^2)}}{2} = -q \pm \sqrt{-q}.$$

Abhängig vom Vorzeichen von $q \in \mathbb{R}$ sind die Nullstellen reell, doppelt oder komplex. Wir treffen daher folgende Fallunterscheidung.

Fall $q < 0$. Die Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ sind reell und die allgemeine Lösung ist

$$f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Da $\forall q \in \mathbb{R} : \lambda_1 = (-q) + \sqrt{-q} > 0$, sind die Lösungen mit $c_1 \neq 0$ unbeschränkt.

Fall $q = 0$. Dann ist $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ eine doppelte Nullstelle und die Lösung ist

$$f(x) = c_1 + c_2 x, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Auch in diesem Fall gibt es unbeschränkte Lösungen, nämlich für $c_2 \neq 0$.

Fall $q > 0$. Die Nullstellen $\lambda_{1,2} = -q \pm i\sqrt{q}$ sind nicht reell und die Lösung ist eine Linearkombination von $v_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{-qx} e^{i\sqrt{q}x}$ und $v_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{-qx} e^{-i\sqrt{q}x}$. Um reellwertige Lösungen zu bekommen, machen wir einen Basiswechsel $(v_1, v_2) \rightsquigarrow (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$ mit $\tilde{v}_1 = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = e^{-qx}\cos(\sqrt{q}x)$ und $\tilde{v}_2 = \frac{1}{2i}(v_1 - v_2) = e^{-qx}\sin(\sqrt{q}x)$. Die allgemeine Lösung ist dann gegeben als Linearkombination

$$f(x) = e^{-qx}\Big(c_1 \cos(\sqrt{q}x) + c_2 \sin(\sqrt{q}x)\Big), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

In diesem Fall gilt $\Big|f(x)\Big| \leq e^{-qx}\Big(|c_1| + |c_2|\Big)$, das heisst, alle Lösungen sind für $x \to \infty$ beschränkt.

14.2. Allgemeine Lösungen

(a) Die Differentialgleichung $f''' + 5f'' - f' - 5f = 0$ hat charakteristisches Polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 - \lambda - 5.$$

$\chi(\lambda) = 0$ ist eine Gleichung 3. Ordnung. Wir sehen jedoch leicht, dass $\lambda_1 = 1$ eine Lösung ist. Mittels Polynomdivision erhalten wir die Faktorisierung

$$\chi(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 6\lambda + 5) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 5)$$

und damit die Nullstellen $\{1, -1, -5\}$. Alle Nullstellen sind verschieden und reell. Folglich lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{-5x}, \qquad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

(b) Um die inhomogene Differentialgleichung $f'' - 3f' - 4f = xe^{-2x} + x$ zu lösen, bestimmen wir wie immer zu erst die die Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $f_\mathrm{h}'' - 3f_\mathrm{h}' - 4f_\mathrm{h} = 0$. Ihr charakteristisches Polynom lautet

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1)$$

und hat die Nullstellen $\{4, -1\}$. Folglich lautet die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$f_\mathrm{h}(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Um eine partikuläre Lösung f_p der inhomogenen Gleichung zu finden lösen wir

$$\begin{aligned} y_1'' - 3y_1' - 4y_1 &= xe^{-2x}, \\ y_2'' - 3y_2' - 4y_2 &= x \end{aligned}$$

separat. Da die Gleichung linear ist, gilt nach Superpositionsprinzip $f_\mathrm{p} = y_1 + y_2$.

e^{-2x} ist *keine* Lösung der homogenen Gleichung, da -2 kein Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Daher funktioniert für die erste Gleichung der Ansatz

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (ax + b)e^{-2x}, \\ y_1'(x) &= ae^{-2x} - 2(ax + b)e^{-2x}, \\ y_1''(x) &= -4ae^{-2x} + 4(ax + b)e^{-2x}, \\ y_1'' - 3y_1' - 4y_1 &= (-4 - 3)ae^{-2x} + (4 + 6 - 4)(ax + b)e^{-2x} \\ &= 6a\,xe^{-2x} + (6b - 7a)e^{-2x} \overset{!}{=} xe^{-2x}. \end{aligned}$$

Für a und b erhalten wir die Bedingungen $6a = 1$ und $(6b - 7a) = 0$. Also ist $a = \frac{1}{6}$ und $b = \frac{7}{36}$ und wir erhalten

$$y_1(x) = (\tfrac{1}{6}x + \tfrac{7}{36})e^{-2x}.$$

e^{0x} ist *keine* Lösung der homogenen Gleichung, da 0 kein Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Daher funktioniert für die zweite Gleichung der Ansatz

$$y_2(x) = (ax + b)e^{0x} = (ax + b).$$

Einsetzen ergibt

$$y_2'' - 3y_2' - 4y_2 = 0 - 3a - 4(ax + b) = -4ax - (3a + 4b) \overset{!}{=} x$$

Für a und b erhalten wir die Bedingungen $-4a = 1$ und $(3a + 4b) = 0$. Also ist $a = -\frac{1}{4}$ und $b = \frac{3}{16}$ und wir erhalten

$$y_2(x) = -\tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{16}.$$

Eine partikuläre Lösung der ursprünglichen Gleichung ist folglich gegeben durch

$$f_{\mathrm{p}}(x) = y_1(x) + y_2(x) = (\tfrac{1}{6}x + \tfrac{7}{36})e^{-2x} - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{16}.$$

Die allgemeine Lösung des Problems lautet somit

$$\begin{aligned} f(x) &= f_{\mathrm{h}}(x) + f_{\mathrm{p}}(x) \\ &= c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x} + (\tfrac{1}{6}x + \tfrac{7}{36})e^{-2x} - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{3}{16}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

14.3. Anfangswertprobleme

(a) Die Differentialgleichung $f'' + f' = 0$ ist linear und homogen. Ihr charakteristisches Polynom $\lambda^2 + \lambda = 0$ hat die Nullstellen $\{0, -1\}$. Die allgemeine Lösung lautet somit

$$f(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} = c_1 + c_2 e^{-x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Anfangsdaten ergibt die Bedingungen

$$\begin{aligned} 2 &= f(1) = c_1 + c_2 e^{-1}, \\ 2 &= f'(1) = -c_2 e^{-1}. \end{aligned}$$

Also ist $c_1 = 4$ und $c_2 = -2e$, das heisst die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$f(x) = 4 - 2e \cdot e^{-x} = 4 - 2e^{1-x}.$$

(b) Die Differentialgleichung $f'' - f = 2\cosh(x)$ ist linear und inhomogen. Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $f_{\mathrm{h}}'' - f_{\mathrm{h}} = 0$. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 - 1 = 0$ sind $\{1, -1\}$. Es folgt

$$f_{\mathrm{h}}(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Inhomogenität $2\cosh(x) = e^x + e^{-x}$ ist somit eine Lösung der homogenen Gleichung. Lösungen der inhomogenen Gleichung sind daher von der Form

$$x \cdot (ce^x + be^{-x}).$$

Die Rechnung wird jedoch einfacher, wenn wir folgenden äquivalenten Ansatz wählen.

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{p}}(x) &= x \cdot (a\cosh x + b\sinh x), \\ f_{\mathrm{p}}'(x) &= x \cdot (a\sinh x + b\cosh x) + (a\cosh x + b\sinh x), \\ f_{\mathrm{p}}''(x) &= x \cdot (a\cosh x + b\sin x) + 2(a\sinh x + b\cosh x), \end{aligned}$$

$$f_{\mathrm{p}}'' - f_{\mathrm{p}} = 2(a\sinh x + b\cosh x) \overset{!}{=} 2\cosh(x).$$

Wir folgern $a = 0$ und $b = 1$. Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung lautet somit $f_{\mathrm{p}}(x) = x\sinh(x)$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist folglich gegeben durch

$$f(x) = f_{\mathrm{h}}(x) + f_{\mathrm{p}}(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x\sinh(x), \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

mit $f'(x) = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + \sinh(x) + x\cosh(x)$. Einsetzen der Anfangsdaten ergibt

$$\begin{aligned} 1 &= f(0) = c_1 + c_2, \\ -1 &= f'(0) = c_1 - c_2. \end{aligned}$$

Wir erhalten $c_1 = 0$ und $c_2 = 1$, das heisst, die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$f(x) = e^{-x} + x\sinh(x).$$

Probe. Die Korrektheit der Lösung lässt sich sehr leicht durch Einsetzen überprüfen. Es ist die beste Methode um allfällige Rechenfehler aufzuspüren. Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} + \sinh(x) + x\cosh(x), \\ f''(x) &= e^{-x} + 2\cosh(x) + x\sinh(x), \\ f'' - f &= 2\cosh(x). \end{aligned}$$

Ferner gilt $f(0) = 1 + 0$ und $f'(0) = -1 + 0 + 0$, das heisst, die Lösung ist korrekt.

14.4. Integrale

(a) $F(t) = -\frac{1}{4}t^4 + 2t^3 - \frac{3}{4}t^2 - 7t$ ist eine Stammfunktion von $f(t) = -t^3 + 6t^2 - \frac{3}{2}t - 7$.

$$\int_0^4 f(t)\,dt = F(4) - F(0) = (-64 + 2\cdot 64 - 12 - 28) - 0 = 24.$$

(b) $F(\xi) = \log|\xi|$ ist eine Stammfunktion zu $f(\xi) = \frac{1}{\xi}$. Daher ist

$$\int_{e^{-5}}^{e^7} \frac{1}{\xi}\,d\xi = F(e^7) - F(e^{-5}) = 7\log(e) - (-5)\log(e) = 7 + 5 = 12.$$

(c) Mit Partieller Integration und der Identität $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\cos\varphi)^2\,d\varphi &= (\sin\varphi)(\cos\varphi)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi (\sin\varphi)^2\,d\varphi \\ &= 0 + \int_0^\pi 1 - (\cos\varphi)^2\,d\varphi = \pi - \int_0^\pi (\cos\varphi)^2\,d\varphi. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{5}{\pi}\int_0^\pi 8(\cos\varphi)^2\,d\varphi = \frac{5}{\pi}\cdot 4\pi = 20.$$

(d) Die Funktion $x^2\log(x)$ ist stetig auf $]0,1]$. Ferner gilt $x^2\log(x)\to 0$ für $x\to 0$, wie in Beispiel 5.2.3.ii) gezeigt. Folglich ist die Funktion integrierbar. Mit partieller Integration gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 9x^2\log(x)\,dx &= 3x^3\log(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{3x^3}{x}\,dx\\ &= 0 - \lim_{x\to 0}\Big(3x^3\log(x)\Big) - \int_0^1 3x^2\,dx = 0-0-1=-1.\end{aligned}$$

Dank Linearität des Integrals gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 12+4x-9x^2\log(x)\,dx &= \int_0^1 12+4x\,dx - \int_0^1 9x^2\log(x)\,dx\\ &= 12x+2x^2\Big|_0^1 - (-1) = 15.\end{aligned}$$

14.5. Stammfunktionen

(a) Es gilt $f(x)=\frac{1-x^3}{x^2}=x^{-2}-x$. Eine Stammfunktion von f ist $F(x)=-x^{-1}-\frac{1}{2}x^2$.

(b) Der Integrand ist nur für $\beta>0$ definiert. In diesem Bereich ergibt die Substitution $g(\beta)=\log\beta$ mit $g'(\beta)=\frac{1}{\beta}$ die Stammfunktion

$$\int \frac{1}{\beta(\log\beta)^2}\,d\beta = \int \frac{g'(\beta)}{(g(\beta))^2}\,d\beta = \int\Big(-\frac{1}{g(\beta)}\Big)'\,d\beta = -\frac{1}{g(\beta)} = -\frac{1}{\log\beta}.$$

(c) Eine Stammfunktion von $f(t)=\sin(3t-\frac{\pi}{4})$ ist $F(t)=-\frac{1}{3}\cos(3t-\frac{\pi}{4})$.

(d) Wir verwenden eine Partialbruchzerlegung. Für den Nenner gilt

$$x^2-2x-63=(x+7)(x-9).$$

Seien $A,B\in\mathbb{R}$, sodass gilt

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-63}=\frac{A}{x+7}+\frac{B}{x-9}.$$

Dann folgt

$$5x-3=A(x-9)+B(x+7)=(A+B)x-9A+7B.$$

Wir erhalten die Bedingungen $A+B=5$ und $-9A+7B=-3$. Die erste in die zweite eingesetzt ergibt $-9\cdot 5+16B=-3$, also $B=\frac{21}{8}$. Daraus folgt $A=\frac{19}{8}$, sodass gilt

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-3}{x^2-2x-63}\,dx &= \frac{19}{8}\int\frac{1}{x+7}\,dx + \frac{21}{8}\int\frac{1}{x-9}\,dx\\ &= \frac{19}{8}\log|x+7| + \frac{21}{8}\log|x-9|.\end{aligned}$$