1. Folgen [4 Punkte]

(a) Begründen Sie, warum die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ nicht konvergiert.

(b) Existieren folgende Grenzwerte? Falls ja, bestimmen Sie deren Wert.

$$\lim_{n\to\infty} b_n, \qquad b_n := 4^{-n}\cos(n\pi + 1) \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n, \qquad v_n := \left(\frac{n^4}{7^n}, n\,4^{-n}, 7\sqrt[n]{4}\right) \in \mathbb{R}^3.$$

(c) Beweisen Sie Konvergenz der reelle Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n = \frac{7 + 3^{-n}}{\dfrac{n^4}{5^n} + n^2\left(\dfrac{1}{8}\right)^n + \dfrac{\sqrt[n]{9}}{6}},$$

berechnen Sie den Grenzwert und formulieren Sie den dabei angewendeten Satz.

---

2. Reihen [4 Punkte]

(a) Zeigen Sie, dass folgende Reihe konvergiert und dass ihr Wert kleiner ist als 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{n}\right)^{1-3n}$$

(b) Berechnen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, sodass folgende Reihe konvergiert.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n\,2^n}x^n$$

---

3. Stetigkeit [4 Punkte]

(a) Sei $y \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+y)^3 - y^3}{x}, \qquad \lim_{x\to 3}\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}.$$

(b) Bestimmen Sie die Konstanten α und β so, dass die Funktion $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta, & \text{falls } -2 \le x < -1, \\ (\alpha+\beta)x, & \text{falls } -1 \le x \le 1, \\ x^2 + \alpha x - \beta, & \text{falls } \quad 1 < x \le 2. \end{cases}$$

stetig wird und zeichnen Sie den Graphen von f.

1. Folgen [Lösung]

(a) *Variante 1.* Wir zeigen, dass kein $x \in \mathbb{R}$ Grenzwert der Folge $a_n = (-1)^n$ sein kann. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Falls $x < 0$, so gilt $|x - a_{2n}| = |x - 1| = 1 - x \geq 1$. Falls $x \geq 0$, so ist $|x - a_{2n+1}| = |x + 1| = x + 1 \geq 1$.

*Variante 2.*Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n - a_{n+1}| = 2$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist somit keine Cauchy-Folge und damit auch nicht konvergent.

(b) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, denn für beliebiges $\varepsilon > 0$ ist

$$|b_n| = 4^{-n}|\cos(n\pi + 1)| \leq 4^{-n} < \varepsilon \quad \forall n \geq \log(\tfrac{1}{\varepsilon}).$$

Alternativ mit dem „Prinzip der zwei Polizisten“:

$$0 \leq |b_n| = 4^{-n}|\cos(n\pi + 1)| \leq 4^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = (0, 0, 7)$, denn

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4}{7^n}, n\,4^{-n}, 7\sqrt[n]{4}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} n^4(\tfrac{1}{7})^n, \lim_{n\to\infty} n(\tfrac{1}{4})^n, 7\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{4}\right).$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $n^p q^n \to 0$ für $p \in \mathbb{N}$, $0 < q < 1$. Wir verwenden dies für $p = 4, q = \frac{1}{7}$ sowie für $p = 1, q = \frac{1}{4}$. Ferner wurde $\sqrt[n]{4} \to 1$ gezeigt.

(c) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Falls zusätzlich $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \neq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Der Nenner der Folge und dessen Grenzwert sind beide ungleich Null, denn

$$\frac{n^4}{5^n} + n^2\left(\frac{1}{8}\right)^n + \frac{\sqrt[n]{9}}{6} \geq \frac{\sqrt[n]{9}}{6} \geq \frac{1}{6}.$$

Wir dürfen daher die obigen Grenzwertsätze anwenden und berechnen wie in (b)

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{7 + \lim\limits_{n\to\infty} 3^{-n}}{\lim\limits_{n\to\infty} n^4(\frac{1}{5})^n + \lim\limits_{n\to\infty} n^2(\frac{1}{8})^n + \frac{1}{6}\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{9}} = \frac{7+0}{0+0+\frac{1}{6}} = 42.$$

2. Reihen [Lösung]

(a) Die Reihe konvergiert nach Wurzelkriterium, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{3n-1}{n}\right)^{1-3n}\right|} = \left(\frac{3n-1}{n}\right)^{\frac{1}{n}-3} = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{3-\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{n}{3n-n}\right)^{3-\frac{1}{n}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Ferner lässt sich die Reihe abschätzen durch

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{n}\right)^{1-3n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{3n-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n-1} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n.$$

Letzteres ist eine geometrische Reihe mit Grenzwert $\frac{2}{1-\frac{1}{8}} = \frac{16}{7} < 3$. Somit gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{n}\right)^{1-3n} < 3.$$

(b) Es gilt $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Die Reihe ist eine Potenzreihe mit Konvergenzradius

$$\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n\,2^n}\right|}} = \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\,2^n} = 2\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 2.$$

Folglich ist die Reihe konvergent, falls $|x| < 2$ und divergent, falls $|x| > 2$.

Für $x = 2$ handelt es sich um die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\,2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

welche konvergiert. Für $x = -2$ handelt es sich um die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n\,2^n} (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

welche divergiert. Die Potenzreihe konvergiert also für alle $x \in \,]-2, 2]$.

3. Stetigkeit [Lösung]

(a) Für $x \neq 0$ ist

$$\frac{(x+y)^3 - y^3}{x} = \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - y^3}{x} = x^2 + 3xy + 3y^2$$

Also folgt

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+y)^3 - y^3}{x} = \lim_{x\to 0}\Big(x^2 + 3xy + 3y^2\Big) = 3y^2.$$

Der Nenner von

$$f(x) := \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$$

ist für $x = 3$ ungleich Null, denn $3^2 - 12 \cdot 3 + 20 = 9 - 36 + 20 = -7$. Folglich ist f stetig an $x = 3$ gemäss eines Satzes aus der Vorlesung (Beispiel 4.1.3.ii) und es gilt

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = \frac{3^2 - 5 \cdot 3 + 6}{-7} = 0.$$

(b) Die Funktion $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha x + \beta, & \text{falls } -2 \leq x < -1, \\ (\alpha+\beta)x, & \text{falls } -1 \leq x \leq 1, \\ x^2 + \alpha x - \beta, & \text{falls } \quad 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

ist in $[-2,2] \setminus \{-1,1\}$ stetig als Komposition stetiger Funktionen. f ist zudem stetig an $x = \pm 1$, falls gilt

$$\lim_{-1>x\to -1} f(x) = f(-1) = \lim_{-1<x\to -1} f(x), \qquad \lim_{1>x\to 1} f(x) = f(1) = \lim_{1<x\to 1} f(x).$$

Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} \lim_{-1<x\to -1} f(x) &= \lim_{-1<x\to -1} (\alpha+\beta)x = -(\alpha+\beta) = f(-1), \\ \lim_{-1>x\to -1} f(x) &= \lim_{-1<x\to -1} x^2 - \alpha x + \beta = 1 + \alpha + \beta, \\ \lim_{1<x\to 1} f(x) &= \lim_{1<x\to 1} (\alpha+\beta)x = x^2 + \alpha x - \beta = 1 + \alpha - \beta, \\ \lim_{1>x\to 1} f(x) &= \lim_{1>x\to 1} (\alpha+\beta)x = (\alpha+\beta) = f(1). \end{aligned}$$

Die Bediungen für Stetigkeit lauten also

$$\begin{aligned} -\alpha - \beta &= 1 + \alpha + \beta \\ \alpha + \beta &= 1 + \alpha - \beta. \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $\beta = \frac{1}{2}$. Dann folgt $\alpha = -1$ aus der ersten Gleichung.

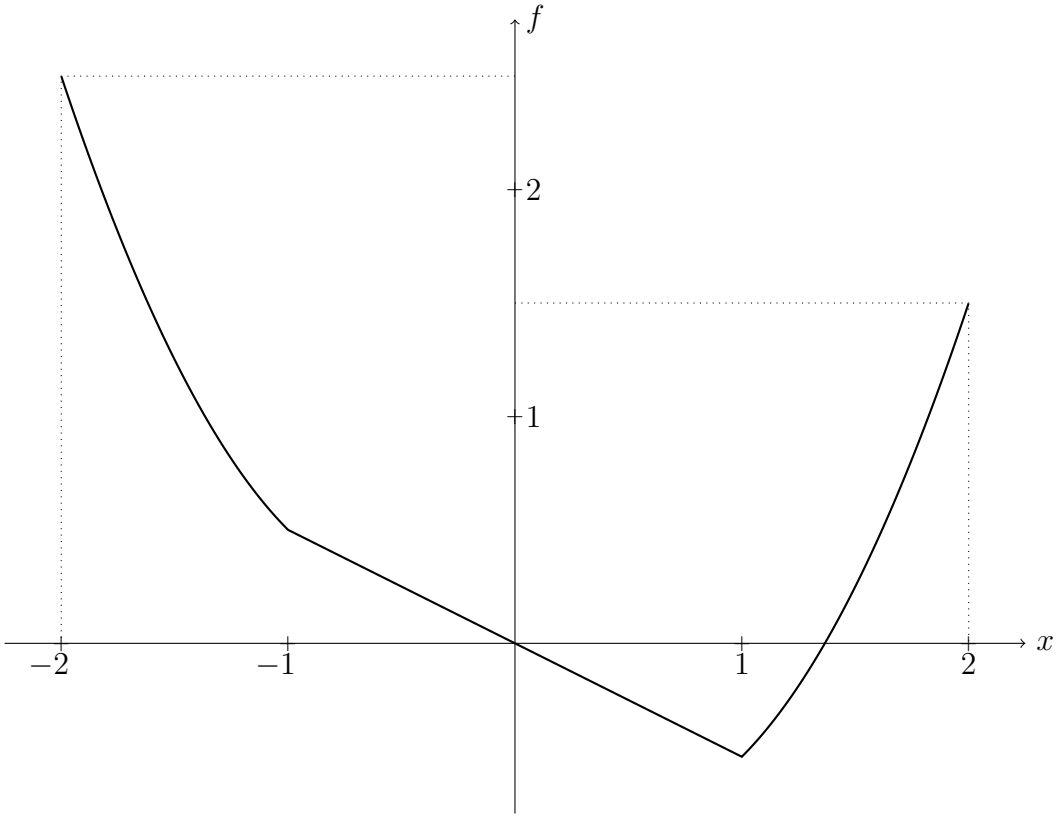

Abbildung 1: Der Graph von f.