6.1. Limes superior ◇ Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte, reelle Folgen

(a) Beweisen Sie folgende Ungleichungen.

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n, \tag{1}$$

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \ge \limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n, \tag{2}$$

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n+b_n) \ge \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n. \tag{3}$$

Hinweis. Zeigen Sie $\limsup_{n\to\infty}(-b_n) = -\liminf_{n\to\infty} b_n$ und leiten Sie (2) und (3) aus (1) her.

(b) Finden Sie konkrete Beispiele für die bei (a) die strikte Ungleichung gilt.

(c) Angenommen, $0 < \liminf_{n\to\infty} a_n < \infty$ und $0 < \limsup_{n\to\infty} a_n < \infty$. Beweisen Sie

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty} a_n} = \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right), \qquad \frac{1}{\liminf_{n\to\infty} a_n} = \limsup_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n}\right).$$

6.2. Konvergenzradien △ Der Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ ist

$$0 \le \rho := \frac{1}{\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}} \le \infty.$$

Es sei $0 \le \alpha \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen.

$$a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{1+\alpha^n} z^n, \qquad b(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n+2} z^n, \qquad c(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^{(k!)}.$$

Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die Reihe $b(x)$ konvergiert.

6.3. Vergleich mit der Zeta-Funktion ♡ In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$$

für $s > 1$ konvergent ist. Leiten Sie daraus Konvergenz der folgenden Reihe her.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n^5+n^3-1}}.$$

Abgabe bis 29. Oktober 2015.

♡= kurz, △= mittel, ◇= lang.

6.4. Partialbrüche (schriftlich) △ Gegeben sei die Zuordnungsvorschrift

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x - 2}.$$

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?

(b) Finden Sie die „Partialbruchzerlegung“ von $f(x)$, also $x_1, x_2, A, B \in \mathbb{R}$, sodass

$$f(x) = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}.$$

(c) Schreiben Sie $f(x)$ als Potenzreihe, das heisst, finden Sie Koeffizienten a_k sodass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Hinweis: geometrische Reihe.

(d) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe aus (c)? Vergleichen Sie diese Menge mit dem Definitionsbereich von f aus (a).

6.5. Scherzaufgabe ♡ In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

divergiert. Nun lassen wir alle Summanden $\frac{1}{n}$ weg, falls bei $n \in \mathbb{N}$ (in Dezimalform) irgendwo die Ziffer 9 auftritt. Zeigen Sie, dass die Reihe dann konvergiert.

Hinweis. Wie viele Summanden mit höchstens k Ziffern gibt es?

Abgabe bis 29. Oktober 2015.

♡= kurz, △= mittel, ◇= lang.