8.1. Lipschitz-Stetigkeit ♡ Eine Funktion $f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heisst Lipschitz stetig, falls eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ existiert, sodass gilt

$$\forall x, y \in I: \quad |f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|.$$

(a) Sei $r > 0$. Zeigen Sie, dass $f\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ Lipschitz-stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nicht Lipschitz-stetig ist.

(c) Finden Sie eine stetige Funktion $g\colon [-r, r] \to \mathbb{R}$, die nicht Lipschitz-stetig ist. Beweisen Sie Ihre Behauptung und zeichnen Sie den Graphen von g für $r = 3$.

8.2. Abstand (schriftlich) △ Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{C}$. Was misst folgende Funktion?

$$\begin{aligned} d_M\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto \inf\{|z - w|\,;\ w \in M\}. \end{aligned}$$

(a) Beweisen Sie, dass die Funktion $d_M\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist.

(b) Zeigen Sie: Die Äquivalenz $d_M(z) = 0 \Leftrightarrow z \in M$ gilt genau dann, wenn $M = \overline{M}$.

Hinweis. Der Abschluss $\overline{M}$ einer Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$ ist definiert als

$$\overline{M} = \{z \in \mathbb{C}\,;\ \exists (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M : \lim_{n\to\infty} z_n = z\}.$$

(c) Sei $M = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z| < 1\}$. Zeichnen Sie die Graphen von d_M und $d_{\mathbb{C}\setminus M}$.

8.3. Unstetigkeit △ Die Funktion $f\colon\ ]0, 1] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \text{ mit } x = \frac{p}{q} \text{ für teilerfremde } p, q \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{falls } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x \in\ ]0, 1] \cap \mathbb{Q}$ unstetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f in jedem Punkt $x \in\ ]0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist.

Hinweis. Man betrachte den Abstand von $x \in\ ]0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ zur Menge

$$M_\varepsilon = \{\tfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}\,;\ p, q \in \mathbb{N},\ 1 \leq p \leq q \leq \tfrac{1}{\varepsilon}\}.$$