13.1. Einfache Lösungen ♡ Folgende Differentialgleichungen haben besonders einfache Lösungen. Erraten Sie jeweils eine Lösung und beweisen Sie deren Korrektheit durch Einsetzen.

$$f'(x) = -\Big(f(x)\Big)^2, \qquad g'(x) = e^{-g(x)}, \qquad h'(x) = \sin\Big(h(x)\Big).$$

13.2. Ansatz ♡ Bestimmen Sie *eine* Lösung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung

$$f''(x) + 7f'(x) - 2f(x) = x^2 + 1.$$

Verwenden Sie für f den Ansatz eines allgemeinen Polynoms zweiten Grades und bestimmen Sie die Koeffizienten, sodass die Funktion die Differentialgleichung löst. Machen Sie am Ende die Probe durch Einsetzen in die Gleichung

13.3. System linearer Differentialgleichungen △ Gegeben Sei das System

$$\begin{cases} \dot{f} = 2f - g, \\ \dot{g} = 4f - 2g, \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Lösungen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Systems zu den Anfangsdaten $f(0) = 3$ und $g(0) = 5$. Machen Sie am Ende die Probe.

Hinweis. Schreiben Sie das System als Gleichung $\dot{F} = AF$ mit einer (2×2)-Matrix A und finden Sie die Lösung $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, indem Sie $\operatorname{Exp}(tA) = I + tA + \frac{1}{2}(tA)^2 + \dots$ explizit berechnen. Was fällt auf?

(b) Können Sie die Anfangswerte so wählen, dass f und g beide konstant sind?

13.4. Charakteristisches Polynom (schriftlich) ◇

(a) Bestimmen Sie die allgemeine (reelle) Lösung der Differentialgleichung

$$f^{(4)} + 2f^{(2)} + f = 0.$$

Hinweis: Satz 5.6.3.

(b) Finden Sie diejenige Lösung $f(t)$, welche die Anfangsbedingungen

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 1$$

erfüllt. Machen Sie am Ende die Probe.

13.5. Entropie △ Die Funktion $\phi\colon [0,\infty[\to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} x\log x, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass φ auf $[0,\infty[$ konvex ist und ein eindeutiges Minimum annimmt. Finden Sie dieses Minimum. *Hinweis:* Beweisen Sie Konvexität bei $x = 0$ separat.

(b) Sei $D := \{(p_1,\ldots,p_n) \in [0,1]^n\,;\ p_1 + \ldots + p_n = 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Für $p \in D$ ist

$$H(p) = -\sum_{k=1}^{n} \varphi(p_k)$$

die sogenannte *Entropie* von p. Zeigen Sie, dass $H\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist und ein Maximum annimmt. *Hinweis:* Satz 4.2.3 und Satz 4.5.2.

(c) Sei $q = (\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}) \in D$. Berechnen Sie $H(q)$. Beweisen Sie die Ungleichung

$$\forall p \in D : H(p) \le H(q)$$

und folgern Sie, dass $H(q)$ der maximale Wert von H auf D ist. *Hinweis:* Jensen.

Bemerkung. Angenommen, ein Versuch hat n mögliche Ergebnisse, die jeweils mit Wahrscheinlichkeiten $p_k \in [0,1]$, $k = 1,\ldots,n$ eintreten, wobei $p_1 + \ldots + p_n = 1$. Dann ist die Entropie $H((p_1,\ldots,p_n))$ ein natürliches Mass für die Ungewissheit über den Ausgang des Versuchs. Wir zeigen, dass die Ungewissheit am grössten ist, wenn alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind.