# Selbsteinschätzungstest

Dieser Test bietet Ihnen die Möglichkeit, Ihre mathematischen Schulkenntnisse abzurufen und zu überprüfen. Die Teilnahme ist freiwillig.

Bei jeder Frage ist jeweils genau eine Antwort korrekt. Wenn Sie eine Antwort nicht wissen, raten Sie nicht, sondern wählen Sie die Option "Weiss ich nicht.". Dies gibt uns eine bessere Rückmeldung.

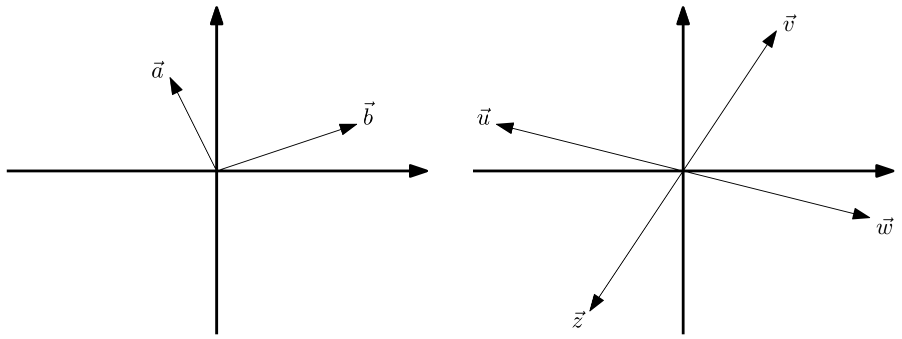
Verwenden Sie als Hilfsmittel nur Papier und Stift. Planen Sie eine Bearbeitungszeit von ca. 60 Minuten ein. Geben Sie Ihre Antworten bis

**Donnerstag, den 24. September um 17.00 Uhr**

ein. Sie erhalten nach der Eingabe Ihre Punktzahl und die Lösung. Nach dem Einsendeschluss erfolgt die Veröffentlichung weiterer Statistiken.

---

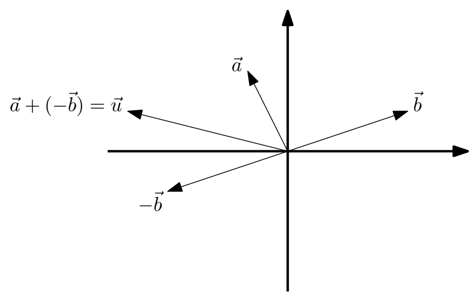
**1.** Gegeben seien folgende Vektoren




Welcher der Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ und $\vec{z}$ stellt den Vektor $\vec{b} - \vec{a}$ dar?

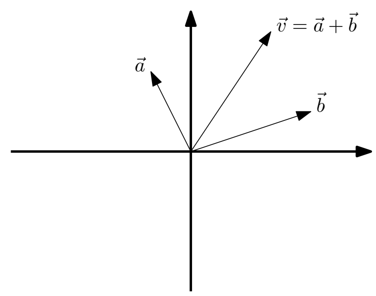
(a) $\vec{u}$

Nein, dieser Vektor stellt den Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ dar. Es ist $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ und damit



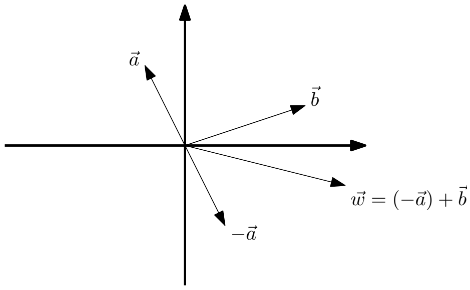

(b) $\vec{v}$

Nein, dies ist die Summe der beiden Vektoren $\vec{a} + \vec{b}$:



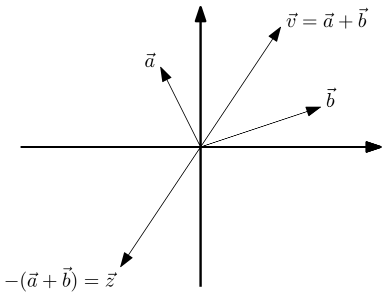

√ (c) $\vec{w}$

Richtig. Es ist $\vec{b} - \vec{a} = (-\vec{a}) + \vec{b}$ und damit




(d) $\vec{z}$

Nein, dies stellt den Vektor $-(\vec{a}+\vec{b})$ dar:




**2.** Sei $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Dann ist $|\vec{a}| =$

(a) 1.

(b) 2.

√ (c) 3.

(d) 9.

(e) Keines davon.

Der Betrag eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ berechnet sich durch

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

In unserem Fall rechnen wir nach, dass $|\vec{a}| = \sqrt{1+4+4} = 3$ gilt.

**3.** Die Schnittmenge eines Würfels mit einer Ebene sei ein Vieleck. Bestimmen Sie die maximale Anzahl von Ecken dieses Vielecks.

(a) 3

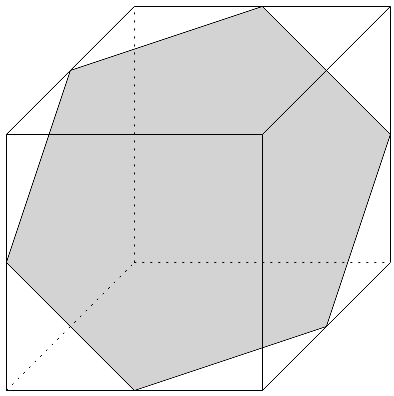
(b) 4

√ (c) 6

(d) 8

(e) Keine der anderen Antworten ist korrekt.

Da ein Würfel 6 Seitenflächen hat, schneidet eine Ebene höchstens diese 6 Flächen. Um ein 6-Eck anzugeben, wähle zum Beispiel 6 Kantenmittelpunkte des Würfels, wie im Bild unten angegeben, und verbinde diese.



**4.** Welche der folgenden Rechenregeln stimmt für alle positiven reellen Zahlen $a$ und $b$?

(a) $\dfrac{1}{a+b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

Nein, wähle zum Beispiel $a = 1$ und $b = 2$. Dann ist die linke Seite gleich $\frac{1}{3}$, die rechte gleich $\frac{3}{2}$.

(b) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Nein, wähle zum Beispiel $a = 1$ und $b = 4$. Dann ist die linke Seite gleich $\sqrt{5}$, die rechte gleich 3.

(c) $(a+b)(c+d) = ac + bd$

Nein. Setze zum Beispiel $a = b = c = d = 1$, dann gilt für die linke Seite:

$$(a+b)(c+d) = (1+1)(1+1) = 2 \cdot 2 = 4,$$

für die rechte Seite aber:

$$ac + bd = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 + 1 = 2.$$

Hingegegen gilt $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

(d) $\ln(a+b) = \ln(a) + \ln(b)$

Nein. Wählen Sie zum Beispiel $a = b = 1$. Dann ist die linke Seite $\ln(2)$ und die rechte $\ln(1) + \ln(1) = 0 + 0 = 0 \neq \ln(2)$.

Es gilt aber $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$.

$\surd$ (e) Keine.

**5.** Welche reellen Zahlen $x$ erfüllen die Ungleichung $|x-2| \leq 3$?

(a) Die Ungleichung ist niemals erfüllt.

(b) $x \leq 5$

(c) $x \in [-3, 3]$

(d) $x \geq -1$

$\surd$ (e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Es gilt:

$$\begin{aligned} |x-2| \leq 3 &\iff x - 2 \leq 3 \text{ und } -(x-2) \leq 3 \\ &\iff x \leq 5 \text{ und } -1 \leq x \\ &\iff x \in [-1, 5]. \end{aligned}$$

**6.** Die Lösungsmenge der Gleichung $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ ist ...

(a) leer.

(b) $\{-1, 1\}$.

(c) $\{-2, -1, 1, 2\}$.

√ (d) $\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$.

(e) Keine der Aussagen stimmt.

Sei $x^2 = z$, dann ergibt sich die quadratische Gleichung $z^2 - 3z + 2 = 0$, mit Lösungen:

$$z_{1/2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}.$$

Setzen wir die Lösungen $z_1 = 1, z_2 = 2$ in die Gleichung $x^2 = z$ ein und lösen jeweils nach $x$ auf, so erhalten wir die Lösungsmenge $\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$.

**Cave!** Wenn Sie die Lösung durch Einsetzen gefunden haben, wissen Sie zunächst nicht, dass $\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\}$ wirklich die Lösungsmenge ist. Es könnte auch noch weitere Zahlen geben. Mit dem Ansatz oben, können Sie dies ausschliessen.

**7.** Welcher der folgenden Ausdrücke ist für $a, b > 0$ gleich $\ln(a^4b^2) - \ln(a^2b^{-2})$?

(a) $6\ln(a)$

(b) $2\ln(a) - 4\ln(b)$

(c) $\dfrac{\ln(a^2b)}{\ln(ab^{-1})}$

√ (d) $\ln(a^2b^4)$

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Verwende die Rechenregeln $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ und $\ln(a^r) = r\ln a$ und erhalte

$\ln(a^4b^2) - \ln(a^2b^{-2}) = 4\ln a + 2\ln b - (2\ln a - 2\ln b) = 2\ln a + 4\ln b = \ln(a^2b^4)$

oder kürzer

$$\ln(a^4b^2) - \ln(a^2b^{-2}) = \ln\left(\frac{a^4b^2}{a^2b^{-2}}\right) = \ln(a^2b^4).$$

**8.** Welche der Folgen an Ungleichungen ist korrekt?
Dabei ist $e = 2,71828\ldots$ die Eulersche Zahl.

(a) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) < e < \frac{1}{e} < \ln e < e^2 < 9$

(b) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) < \frac{1}{e} < \ln e < e < 9 < e^2$

$\surd$ (c) $\ln\left(\frac{1}{e}\right) < \frac{1}{e} < \ln e < e < e^2 < 9$

(d) $\frac{1}{e} < \ln\left(\frac{1}{e}\right) < \ln e < e < e^2 < 9$

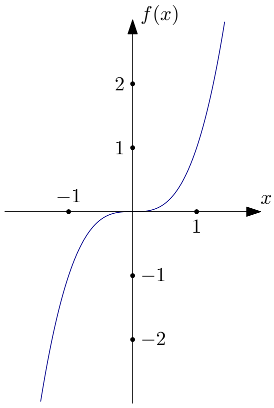
Nach Definition ist $\ln(e) = 1$ und mit $1 < e \approx 2,71828 < 3$ folgt

$$0 < \frac{1}{e} < 1 = \ln e < e < e^2 < 9.$$

Mit $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ ist insgesamt

$$\ln\left(\frac{1}{e}\right) < \frac{1}{e} < \ln e < e < e^2 < 9.$$

**9.** Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f$ mit $f(x) = x^3$.
Durch Verschieben um 2 Einheiten nach rechts erhalten wir den Graphen einer neuen Funktion $g$. Wie lautet die Funktionsgleichung von $g$?




√ (a) $g(x) = (x-2)^3$

(b) $g(x) = (x+2)^3$

(c) $g(x) = x^3 - 2$

(d) $g(x) = x^3 + 2$

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Eine Verschiebung um 2 nach rechts bedeutet, dass die neue Funktion $g$ den Wert $f(x)$ bei $x+2$ annimmt: $g(x+2) \overset{!}{=} f(x)$ für alle $x \iff g(x) = f(x-2)$. Das heisst, in $f(x)$ ist die Variable $x$ durch $x-2$ zu ersetzen.

**10.** Bestimmen Sie $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

(a) $0$

(b) $\frac{1}{2}$

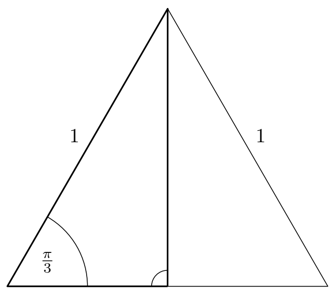
(c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\checkmark$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(e) $1$

(f) Das geht nur mit einem Taschenrechner.

Das Bogenmass $\frac{\pi}{3}$ entspricht dem Winkel 60 Grad. Betrachte ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge 1.




Mit Hilfe einer Höhe erhalten wir ein neues rechtwinkliges Dreieck. In diesem hat die Gegenkathete des Winkels (gleich dieser Höhe) die Länge $\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Damit ist der Sinus gleich

$$\frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**11.** Welche der Folgen an Ungleichungen ist korrekt ?

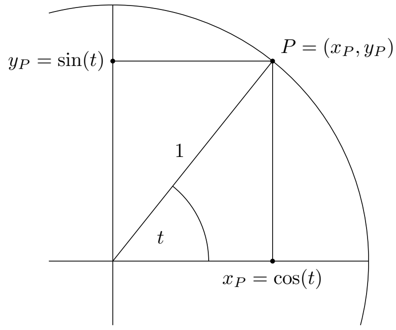
(a) $\sin(2015 \cdot \pi) < \cos(2015 \cdot \pi) < \cos(2016 \cdot \pi)$

√ (b) $\cos(2015 \cdot \pi) < \sin(2015 \cdot \pi) < \cos(2016 \cdot \pi)$

(c) $\cos(2015 \cdot \pi) < \cos(2016 \cdot \pi) < \sin(2016 \cdot \pi)$

(d) $\sin(2015 \cdot \pi) < \sin(2016 \cdot \pi) < \cos(2016 \cdot \pi)$

Für einen Punkt auf dem Einheitskreis $P = (x_P, y_P)$ ist die $x$-Koordinate $x_P$ durch den Kosinus gegeben und die $y$-Koordinate $y_P$ durch den Sinus.



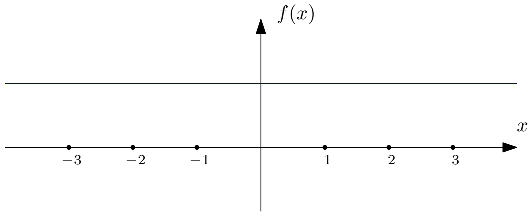

Sinus und Kosinus sind folglich periodische Funktionen mit Periodenlänge $2\pi$. Deshalb gilt $\sin(2015 \cdot \pi) = \sin(\pi) = 0$, $\sin(2016 \cdot \pi) = \sin(0) = 0$, sowie $\cos(2015 \cdot \pi) = \cos(\pi) = -1$ und $\cos(2016 \cdot \pi) = \cos(0) = 1$.

Damit bleibt nur

$$\underbrace{\cos(2015 \cdot \pi)}_{=-1} < \underbrace{\sin(2015 \cdot \pi)}_{=0} < \underbrace{\cos(2016 \cdot \pi)}_{=1}$$

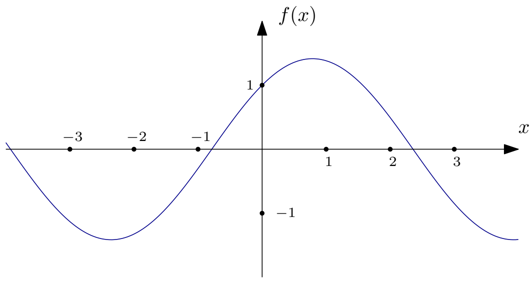
als korrekte Folge.

**12.** Welche Funktion $x \mapsto f(x)$ passt zum folgenden Graphen?




(a) $x \mapsto \sin(x) + \cos(x)$

Nein. Setzen Sie zum Beispiel 0 und $\pi$ für $x$ ein, um festzustellen, dass die Funktion nicht konstant ist. Der Graph dieser Funktion sieht so aus:




√ (b) $x \mapsto \sin^2(x) + \cos^2(x)$

Richtig. Die Summe $\sin^2(x) + \cos^2(x)$ ist konstant gleich 1.

(c) $x \mapsto \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Nein. Setzen Sie zum Beispiel 0 und $\frac{\pi}{2}$ für $x$ ein, um festzustellen, dass die Funktion nicht konstant ist.
Mit den Additionstheoremen zeigt sich, dass die Funktion gleich $x \mapsto 2\sin(x)$ ist.

(d) $x \mapsto \sin(x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

Nein. Mit den Additionstheoremen zeigt sich, dass die Funktion zwar konstant ist, aber gleich 0.

(e) $x \mapsto \sin^2(x) - \cos^2(x)$

Nein. Setzen Sie zum Beispiel 0 und $\frac{\pi}{2}$ für $x$ ein, um festzustellen, dass die Funktion nicht konstant ist.
Mit den Additionstheoremen zeigt sich, dass diese Funktion gleich $x \mapsto -\cos(2x)$ ist.

**13.** Welche Periode hat die Funktion $f$ mit $f(x) = \sin(2x)$?

(a) Es liegt keine Periode vor.

(b) $\frac{\pi}{2}$

(c) 2

√ (d) $\pi$

(e) $\pi^2$

Eine Funktion $f$ hat genau dann Periode $p > 0$, wenn für alle $x$ gilt:

$$f(x) = f(x + p).$$

Für die Sinus-Funktion ist $2\pi$ die kleinste positive Zahl mit

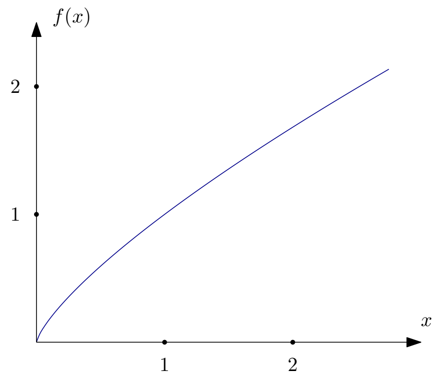
$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi), \text{ für alle } x.$$

In der Aufgabe folgt

$$f(x) = \sin(2x) = \sin(2x + 2\pi) = \sin(2(x + \pi)) = f(x + \pi).$$

Die Funktion $f$ mit $f(x) = \sin(2x)$ hat die Periode $\pi$.

**14.** Welche Funktion $x \mapsto f(x)$ passt zur folgenden Kurve?




(a) $x \mapsto x^3$

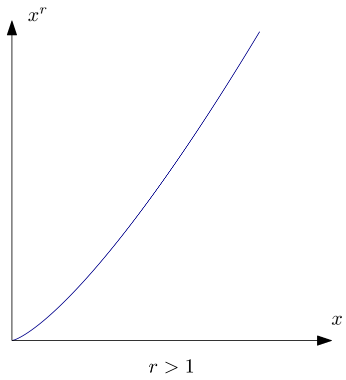
(b) $x \mapsto x^{\frac{4}{3}}$

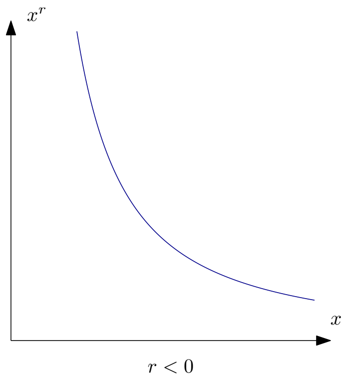
√ (c) $x \mapsto x^{\frac{3}{4}}$

(d) $x \mapsto x^{-\frac{4}{3}}$

(e) $x \mapsto x^{-3}$

Der Graph einer Potenzfunktion $x \mapsto x^r$ ist von der gegebenen Form, falls für den Exponent gilt $0 < r < 1$. Dies ist hier nur für $\dfrac{3}{4}$ der Fall. Die beiden anderen Klassen von Graphen für $r > 1$ und $r < 0$ sehen so aus:



**15.** Gegeben sei die Ebene $E$ mit $E : x + 2y - z = 4$. Welche der folgenden Ebenen ist parallel zu $E$ aber nicht identisch?

(a) $F : 2x + 4y - 2z = 8$

Nein. Die Ebenengleichung $F$ ist äquivalent zu der von $E$, da die Gleichung nur mit 2 multipliziert wurde. Sie definiert also die gleiche Ebene.

(b) $G : \begin{cases} x = 2 + 2s + t \\ y = 2 - s \\ z = 2 + t \end{cases}$

Nein. Der Punkt $(2, 2, 2)$ liegt auf $E$ (da $2 + 4 - 2 = 4$) und $G$ (für $s = t = 0$). Damit sind die beiden Ebenen nicht parallel, es sei denn, sie sind identisch.

Nehmen wir sogar drei Punkte

$s = t = 0$ gibt $(2, 2, 2)$,

$s = 0, t = 1$ gibt $(3, 2, 3)$ und

$s = 1, t = 0$ gibt $(4, 1, 2)$,

sehen wir, dass die beiden Ebenen tatsächlich identisch sind. Alle drei Punkte erfüllen auch die Gleichung von $E$, und weil $G$ ebenfalls eine Ebene definiert, muss es die gleiche sein.

(c) $H : \begin{cases} x = 2 + 2s + t \\ y = 2 + s \\ z = 2 + t \end{cases}$

Nein. Die Normale der Ebene $H$ erhalten wir als Kreuzprodukt der beiden Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Normale der Ebene $E$ gebildet aus den Koeffizienten der Ebenengleichung ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Diese beiden Normalenvektoren sind nicht parallel, denn sie unterscheiden sich nicht um ein skalares Vielfaches. Damit sind auch die beide Ebenen nicht parallel.

√ (d) $L : \begin{cases} x = 2 + 4s - t \\ y = -2s \\ z = -t \end{cases}$

Richtig. Für $L$ ist die Normale gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \text{ Normalenvektor von } E$$

Die Normale von $L$ ist also ein Vielfaches des Normalenvektors von $E$, und somit sind die Ebenen parallel.

Setzen wir nun einen Punkt von $L$, z.B. $(2, 0, 0)$ in die Ebenengleichung von $E$ ein, so sehen wir, dass die Gleichung nicht erfüllt ist.

Damit sind die Ebenen $L$ und $E$ zwar parallel aber nicht identisch.

**16.** Welchen geometrischen Ort beschreibt die Gleichung $x^2 + 6x + y^2 - 7 = 0$?

(a) Einen Kreis mit Mittelpunkt $(3, 0)$ und Radius $r = 4$

$\surd$ (b) Einen Kreis mit Mittelpunkt $(-3, 0)$ und Radius $r = 4$

(c) Einen Kreis mit Mittelpunkt $(-3, 0)$ und Radius $r = 16$

(d) Einen Kreis mit Mittelpunkt $(3, 0)$ und Radius $r = \sqrt{7}$

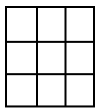
(e) Eine nach unten geöffnete Normalparabel mit Scheitel bei $(-3, 16)$

Wir ergänzen die Gleichung $x^2 + 6x + y^2 - 7 = 0$ zu

$$x^2 + 6x + (\mathbf{9} - \mathbf{9}) + y^2 - 7 = 0 \Longrightarrow (x + 3)^2 + y^2 = 16 = 4^2.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt $(-3, 0)$ und Radius $r = 4$.

**17.** Sara malt die 9 Felder einer Zeichnung mit Farbstiften an. Sie besitzt Stifte in 12 unterschiedlichen Farben. Sara malt genau 3 Felder gelb an und die weiteren Felder jeweils mit einer beliebigen der anderen Farben.



Wie viele Möglichkeiten hat sie dafür?

(a) $\binom{9}{3}$

(b) $11^6$

$\surd$ (c) $\binom{9}{3} \cdot 11^6$

(d) $9!$

(e) $12^9 - 3$

Für die 3 gelben Felder hat Sara $\binom{9}{3}$ Möglichkeiten. Für die weiteren 6 Felder in den anderen 11 Farben hat sie $11^6$ Möglichkeiten, also insgesamt $\binom{9}{3} \cdot 11^6$.

**18.** Eine Urne enthält rote und weisse Kugeln, insgesamt befinden sich 40 Kugeln in der Urne. Die Wahrscheinlichkeit, beim gleichzeitigen Herausgreifen von 2 Kugeln 2 weisse zu ziehen, ist $\frac{9}{20}$.

Wie viele weisse Kugeln befinden sich in der Urne?

(a) Das lässt sich nicht entscheiden.

(b) 13

(c) 18

(d) 26

√ (e) 27

Sei $w$ die Anzahl der weissen Kugeln in der Urne. Dann gilt

$$\frac{w}{40} \cdot \frac{w-1}{39} = \frac{9}{20}.$$

Wir erhalten eine quadratische Gleichung

$$w^2 - w = 26 \cdot 27 \iff w^2 - w - 26 \cdot 27 = 0 \iff (w-27)(w+26) = 0,$$

mit Lösungen $w = 27$ oder $w = -26$. Also muss die Anzahl der weissen Kugeln $w$ die positive Lösung 27 sein.

**19.** Eva und Adam werfen Münzen: Eva bezahlt Adam einen Einsatz von $x$ Franken, dann werden zwei Münzen geworfen. Es gelten folgende Regeln:

- Kommt zweimal Kopf, erhält Eva nichts.
- Kommt zweimal Zahl, erhält Eva ihren Einsatz zurück.
- Zeigt eine Münze Kopf, die andere Zahl, erhält Eva ihren Einsatz plus einen Franken zurück.

Bei welchem Einsatz $x$ ist das Spiel fair, das heisst, weder Adam noch Eva verdienen auf lange Sicht?

(a) Das Spiel ist nie fair.

(b) $x = 1$

$\surd$ (c) $x = 2$

(d) $x = 3$

(e) Bei jedem Einsatz $x$.

(f) Das lässt sich nicht entscheiden.

Die Wahrscheinlichkeiten der drei Ereignisse sind:

- Zweimal Kopf $= \frac{1}{4}$
- Zweimal Zahl $= \frac{1}{4}$
- Einmal Kopf, einmal Zahl $= \frac{1}{2}$.

Als Erwartungswert eines Gewinns erhalten wir somit: $0 \cdot \frac{1}{4} + x \cdot \frac{1}{4} + (x+1) \cdot \frac{1}{2}$. Dies soll gleich gleich dem Einsatz $x$ sein:

$$0 \cdot \frac{1}{4} + x \cdot \frac{1}{4} + (x+1) \cdot \frac{1}{2} = x \Longrightarrow x = 2.$$

**20.** Der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 1}{10n^3 + n + 21}$$

ist gleich ...

(a) $-\frac{1}{21}$.

(b) 0.

(c) $\frac{1}{32}$.

√ (d) $\frac{1}{5}$.

(e) $\infty$.

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 1}{10n^3 + n + 21} \underbrace{=}_{\substack{\text{Zähler und Nenner} \\ \text{dividiert durch } n^3}} \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n^3}}{10 + \frac{1}{n^2} + \frac{21}{n^3}}.$$

Da die Summanden $\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^2}, \frac{21}{n^3}$ jeweils eine Nullfolge bilden, wird der Grenzwert des Quotienten nach den Rechenregeln für Grenzwerte zu $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

**21.**

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ \ldots$$

ist gleich ...

(a) $\frac{5}{8}$.

✓ (b) $\frac{2}{3}$.

(c) $\frac{11}{16}$.

(d) $\frac{3}{2}$.

(e) $\infty$.

Die gegebene Summe definiert eine geometrische Reihe:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

Da $|q| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$, konvergiert die geometrische Reihe und hat den Grenzwert $\frac{1}{1-q} = \frac{2}{3}$.

**22.** Der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$$

ist gleich ...

(a) 0.

✓ (b) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

(c) $\dfrac{1}{2}$.

(d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(e) $\infty$.

Erweitern des Zählers und Nenners mit $\sqrt{2+h}+\sqrt{2}$ ergibt:

$$\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}\cdot\frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{(2+h)-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}.$$

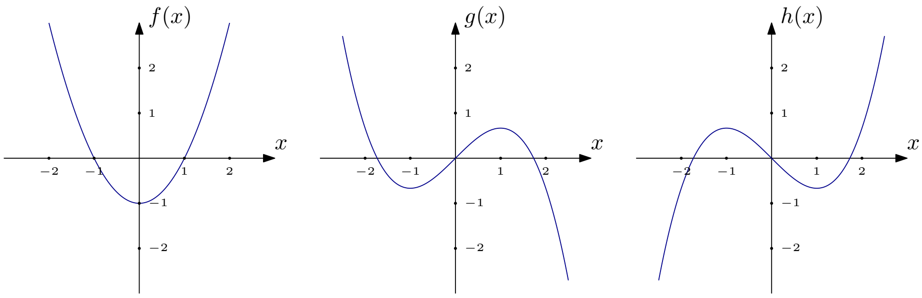
Damit erhalten wir für den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ein anderes Argument lautet: Der Grenzwert ist der Differentialquotient der Funktion $f$ mit $f(x)=\sqrt{x}$ an der Stelle 2, und es gilt $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, und damit

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

**23.** Das folgende Bild zeigt die Graphen dreier Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, von denen eine die Ableitung einer der anderen ist. Welche Aussage ist richtig?




(a) $f' = g$

Falsch. Z.B. ist die Steigung von $f$ bei $x = -2$ negativ, aber $g(-2) > 0$.

(b) $f' = h$

Falsch. Z.B. wechselt die Ableitung von $f$ zwischen $-2$ und $-1$ das Vorzeichen nicht, da die Steigung dort immer negativ ist. Aber es ist $h(-2) < 0$ und $h(-1) > 0$.

(c) $g' = f$

Falsch. Z.B. ist die Steigung von $g$ bei $x = -2$ negativ, aber $f(-2) > 0$.

(d) $g' = h$

Falsch. Z.B. ist die Steigung von $g$ im Nullpunkt positiv, aber $h(0) = 0$.

$\surd$ (e) $h' = f$

Richtig!

(f) $h' = g$

Falsch. Z.B. ist die Steigung von $h$ im Nullpunkt negativ, aber $g(0) = 0$.

**24.** Sei $f$ die Funktion mit $f(x) = e^{2x}$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

(a) $f'(x) = 2xe^{2x-1}$

(b) $f'(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

√ (c) $f'(x) = 2e^{2x}$

(d) $f'(x) = e^{2x}$

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Es gilt:

$$f'(x) = (e^{2x})' \underbrace{=}_{\text{Kettenregel}} (2x)'(e^{2x}) = 2e^{2x}.$$

**25.** Sei $f(x) = \ln(\sin x)$ mit $x \in ]0, \pi[$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

(a) $f'(x) = \dfrac{1}{\sin(x)}$

√ (b) $f'(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

(c) $f'(x) = \ln(\cos(x))$

(d) $f'(x) = \dfrac{1}{x}\sin(x) + \ln(\cos x)$

(e) $f'(x) = \cos(x)\ln(\sin x)$

Die Anwendung der Kettenregel ergibt:

$$f'(x) = (\ln(\sin(x)))' = (\sin(x))'\frac{1}{\sin(x)} = \cos(x)\frac{1}{\sin(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

**26.** Gegeben sei die Funktion $f$ mit $f(x) = -\cos(3x)$. Bestimmen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von $f$ in $\frac{\pi}{2}$.

√ (a) $-3$

(b) $1$

(c) $3\sin(3)$

(d) $3$

(e) Die Tangente existiert nicht.

Die Steigung der Tangente $a_t$ an den Graphen einer Funktion $f$ in einem Punkt $x_0$ ist gleich dem Wert der Ableitungsfunktion $f'$ in $x_0$, das heisst, $a_t = f'(x_0)$. Hier ist $f(x) = -\cos(3x)$ und $f'(x) = 3\sin(3x)$, und damit die Steigung gleich

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) = 3 \cdot (-1) = -3.$$

**27.** Das Integral $\int_0^2 3x^2\,dx$ ist gleich ...

(a) $\frac{4}{3}$.

(b) 2.

(c) $\frac{8}{3}$.

(d) 4.

√ (e) 8.

Das Integral berechnet sich durch

$$\int_0^2 3x^2\,dx = 3\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = 8 - 0 = 8.$$

**28.** Das Integral $\int_0^1 e^{-2t}\,dt$ ist gleich ...

(a) $1 - \frac{1}{e^2}$.

(b) $\frac{1}{2e^2}$.

(c) $\frac{1}{2} - \frac{1}{e^2}$.

(d) $1 - \frac{1}{2e^2}$.

√ (e) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}$

Das Integral berechnet sich durch

$$\int_0^1 e^{-2t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} - (-\frac{1}{2}\cdot 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e^2}.$$

**29.** Das Integral $\int_{-1}^{1} |t|\, dt$ ist gleich ...

(a) 0.

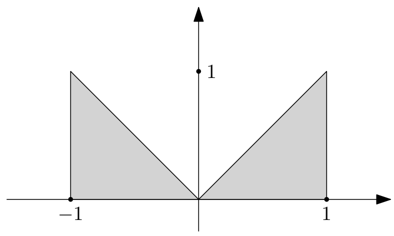
√ (b) 1.

(c) 2.

(d) 4.

(e) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Das Integral $\int_{-1}^{1} |t|\, dt$ ist der Inhalt der Fläche, welche der Funktionsgraph mit der $x$-Achse einschliesst. Also:




Die beiden Dreiecke bilden zusammen ein Quadrat mit Seitenlänge 1, welches den Flächeninhalt 1 hat. Mithin gilt $\int_{-1}^{1} |t|\, dt = 1$.
Alternativ können wir aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Betragsfunktion auch rechnen:

$$\int_{-1}^{1} |t|\, dt = 2 \cdot \int_{0}^{1} t\, dt = 2 \left( \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^1 \right) = 2 \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = 1.$$

**30.** Sei $f$ die Funktion mit $f(x) = \int_3^x \sin(t)\,dt$. Wie lautet die Gleichung der Ableitung?

(a) $f'(x) = \cos(x) - \cos(3)$

(b) $f'(x) = \sin(x) - \sin(3)$

(c) $f'(x) = \cos(x)$

√ (d) $f'(x) = \sin(x)$

(e) Keine der Gleichungen ist korrekt.

Sei $f$ eine stetige Funktion und $a$ eine Konstante. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass die Funktion $F$ mit $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von $f$ ist. Es gilt also $F'(x) = f(x)$. Setze hier $f$ als die Funktion $f(x) = \sin x$ und $a = 3$.
Alternative: Berechne das Integral direkt durch:

$$\int_3^x \sin(t)\,dt = -\cos t\Big|_3^x = -\cos x + \cos 3.$$

Dann ist $f'(x) = (-\cos x + \cos 3)' = \sin x$.