

1. a) Löse $Ax = 0$ mit Gaußelimination:

$$\begin{array}{ccccc|c}
 & 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\
 3 & 3 & 3 & -1 & -4 & 5 & 0 \\
 -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -3 & 0 \\
 2 & 2 & 1 & -1 & -2 & 4 & 0
 \end{array} \xrightarrow{(E)_1} \begin{array}{ccccc|c}
 & 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\
 & 0 & -3 & -1 & 2 & 2 & 0 \\
 -1 & 0 & 3 & 1 & -2 & -2 & 0 \\
 1 & 0 & -3 & -1 & 2 & 2 & 0
 \end{array}$$

$$\xrightarrow{(E)_2} \begin{array}{ccccc|c}
 & 1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\
 & 0 & -3 & -1 & 2 & 2 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}$$

Dann sind z.B. $x_5 = \alpha \in \mathbb{R}$, $x_4 = \beta \in \mathbb{R}$, $x_2 = \gamma \in \mathbb{R}$ frei, und es folgt

$$x_3 = -3x_2 + 2x_4 + 2x_5 = 2\alpha + 2\beta - 3\gamma, \quad x_1 = -2x_2 + 2x_4 + x_5 = \alpha + 2\beta - 2\gamma$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Kern } A = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } \dim(\text{Kern } A) = 3.$$

Eine mögliche Basis ist also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- b) Es gilt $\dim(\text{Bild } A) = r$, wobei $r = \text{Rang } A = 2$ aus dem Gauss-Schema. Bild A wird also erzeugt von 2 linear unabhängigen Spaltenvektoren von A , z.B.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Berechnung von $e^{(1)}$: $e^{(1)} = \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Berechnung von $e^{(2)}$:

$$c^{(2)} = a^{(2)} - (a^{(2)}, e^{(1)}) e^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}_{=3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{(2)} = \frac{c^{(2)}}{\|c^{(2)}\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnung von $e^{(3)}$:

$$\begin{aligned} c^{(3)} &= a^{(3)} - (a^{(3)}, e^{(1)}) e^{(1)} - (a^{(3)}, e^{(2)}) e^{(2)} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}_{=0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{5} \underbrace{\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)}_{=-5} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow e^{(3)} &= \frac{c^{(3)}}{\|c^{(3)}\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. a)

$$1 = b^{(1)}$$

$$x = b^{(2)}$$

$$x^2 = \frac{1}{3}b^{(3)} + \frac{1}{3}b^{(1)}$$

Also ist \mathcal{B} erzeugend (da $1, x, x^2$ erzeugend sind). Da $\dim \mathcal{P}_2 = 3$ sind die Vektoren auch linear unabhängig und bilden somit eine Basis.

b)

$$p(x) = 11x^2 - 2x + 1 = v_1(1) + v_2(x) + v_3(3x^2 - 1)$$

Also:

$$\begin{array}{lll} 3v_3 = 11 & & v_3 = \frac{11}{3} \\ v_2 = -2 & \Rightarrow & v_2 = -2 \\ v_1 - v_3 = 1 & & v_1 = 1 + v_3 = \frac{14}{3} \end{array}$$

Also:

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ -2 \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

c)

$$(b^{(1)}, b^{(2)}) = (1, x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = 0$$

$$(b^{(1)}, b^{(3)}) = 3 \cdot (1, x^2) - (1, 1) = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 1 dx = 1 - 1 = 0$$

$$(b^{(2)}, b^{(3)}) = 3 \cdot (x, x^2) - (x, 1) = \frac{3}{2} \underbrace{\int_{-1}^1 x^3 dx}_{=0} - 0 = 0$$

3. a) Das charakteristische Polynom von A ist:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(\lambda(2 + \lambda) - 1) - (-2 - \lambda + 1) - (1 - \lambda) = -\lambda^3 - 2\lambda + 3\lambda \\ &= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 3) \end{aligned}$$

Bitte wenden!

Folglich sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 0$ die Eigenwerte von A .

$$E_1 = \text{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \text{span} \left\{ v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{-3} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \text{span} \left\{ v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_0 = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ v_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- b) Da $A^T = A$ stehen die (1 dimensionalen) Eigenräume bereits senkrecht aufeinander und man muss bloss noch die Eigenvektoren normieren. Die Basis besteht folglich aus den Spalten folgender Matrix:

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

- c) Es gilt $A = SDS^T$, also:

$$A^5 = (SDS^T)^5 = SD^5S^T = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^5 S^T = S \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3^5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^T$$

Die Eigenwerte von A^5 sind dementsprechend 1 , $-3^5 = -243$ und 0 . Die Eigenvektoren bleiben gleich (Spalten von S).

4. a)

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -4 - \lambda & -3 & -3 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 6 & 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda) ((-4 - \lambda)(5 - \lambda) + 18) \\ &= (2 - \lambda) (\lambda^2 - \lambda - 2) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= 2, \lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$:

$$\begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(E)_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -6 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow y, z \text{ frei}, x = -\frac{y+z}{2} \Rightarrow \text{z.B. } t^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, t^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_3 = -1$:

$$\begin{array}{c} 0 \\ -2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 6 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(E)_1} \begin{array}{c} -1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(E)_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow y = 0, z \text{ frei}, x = -z \Rightarrow t^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$y(t) = Tx(t), x_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}, i = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow y(t) = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = Tx(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Gausselimination:}$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ -2 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{(E)_1} \begin{array}{c} -1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{(E)_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow c_3 = 5, c_2 = 2, c_1 = -3$$

$$\Rightarrow y(t) = -3e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 5e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Bitte wenden!

c) Grenzwertbetrachtung: wenn $t \rightarrow \infty$, folgt:

$y_1(t) \rightarrow \infty$ (ausser $c_1 - c_2 = 0$), $y_2(t) \rightarrow \infty$ (ausser $c_2 = 0$), $y_3(t) \rightarrow \infty$ (ausser $c_2 - 2c_1 = 0$)

Damit $\lim_{t \rightarrow \infty} y_i(t) = 0$ für $i = 1, 2, 3$ gilt, müssen also $c_1 - c_2 = 0$, $c_2 = 0$ und $c_2 - 2c_1 = 0$ gelten, d.h. $c_1 = c_2 = 0$. c_3 ist dabei beliebig.

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix} \Rightarrow y(0) = Tx(0) = \begin{pmatrix} c_3 \\ 0 \\ -c_3 \end{pmatrix}, \text{ mit } c_3 \in \mathbb{R}.$$

d) $\det(A \star A')$; oder

$\det(A \star \text{transpose}(A))$;

Das Vergessen der \star oder das Einsetzen von \top ist **falsch**. Das Semikolon am Ende ist aber fakultativ.

5. a) Sei $p_1(x), p_2(x) \in \mathcal{P}_2$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x)) &= x(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2)'(x) - (\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x)) \\ &= \lambda_1 (x p_1'(x) - p_1(x)) + \lambda_2 (x p_2'(x) - p_2(x)) \\ &= \lambda_1 \mathcal{F}(p_1(x)) + \lambda_2 \mathcal{F}(p_2(x)) \end{aligned}$$

Also ist \mathcal{F} linear.

b)

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(1)]_{\mathcal{B}_1} &= [-1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & [\mathcal{F}(x)]_{\mathcal{B}_1} &= [0]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ [\mathcal{F}(x^2)]_{\mathcal{B}_1} &= [x^2]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & [\mathcal{F}(x^3)]_{\mathcal{B}_1} &= [2x^3]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Folglich ist die Darstellungsmatrix von \mathcal{F} bezüglich Basis \mathcal{B}_1 :

$$A = [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(1-x)]_{\mathcal{B}_2} &= [-1]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & [\mathcal{F}(x)]_{\mathcal{B}_2} &= [0]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ [\mathcal{F}(x^2+x)]_{\mathcal{B}_2} &= [x^2]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & [\mathcal{F}(x^3-1)]_{\mathcal{B}_2} &= [2x^3+1]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Folglich ist die Darstellungsmatrix von \mathcal{F} bezüglich Basis \mathcal{B}_2 :

$$B = [\mathcal{F}]_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$