

# Lösungen zu Prüfung

## Lineare Algebra I/II für D-MAVT

1. [10 Punkte] Hinweise zur Bewertung: Jede Aussage ist entweder wahr oder falsch; machen Sie ein Kreuzchen in das entsprechende Kästchen und zwar so:

wahr	falsch
×	

Als Markierungen sind ausschliesslich Kreuzchen  $\times$  erlaubt. Wenn Sie ein Kreuzchen rückgängig machen wollen, streichen Sie es klar erkennbar durch.

Jede Teilaufgabe a)-j) gibt einen Punkt, wenn alle Kreuzchen richtig gesetzt sind,  $-1$  falls nicht alle Kreuzchen richtig sind und  $0$  falls sie unbeantwortet bleibt. Die erreichte Gesamtpunktzahl wird aber nie negativ sein - wir runden auf  $0$  auf.

**WICHTIG:** Die Reihenfolge der Teilaufgaben a)-j) kann von der auf Ihrem Prüfungsblatt abweichen.

	wahr	falsch
a) Der Vektorraum $C(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist unendlich dimensional (da er alle Polynome enthält).	×	
b) Sei $A$ eine $n \times n$ -Matrix, in welcher jeder Eintrag entweder $0$ oder $1$ ist. Dann ist $A$ orthogonal genau dann wenn sie eine Permutationsmatrix ist.	×	
c) Sei $e_1 = (1, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^3$ . Gilt für eine $3 \times 3$ -Matrix $A$ , dass $e_1, Ae_1, A^2e_1$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden, dann ist $A$ invertierbar.		×
d) Alle stetigen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_{-8}^1 f(t) dt = 0$ bilden einen Untervektorraum von $C(\mathbb{R})$ .	×	
Alle stetigen Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_{-8}^1 f(t) dt = 1$ bilden einen Untervektorraum von $C(\mathbb{R})$ .		×
e) Seien $A_1, A_2, A_3$ drei linear unabhängige Matrizen im Vektorraum der $n \times n$ -Matrizen. Dann gibt es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ , so dass $A_1v + A_2v + A_3v \neq 0$ .	×	
f) Die Menge der $n \times n$ -Matrizen, so dass die Summe der Einträge der ersten Spalte gleich der Summe der Einträge der ersten Zeile ist, bildet <u>keinen</u> Untervektorraum des Vektorraums der $n \times n$ -Matrizen.		×
g) Die Polynome $p(x) = ax + b, q(x) = cx + d$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie dieselben Nullstellen haben oder wenn mindestens eines das Nullpolynom ist.	×	
h) Für eine quadratische Matrix $A$ gilt $\text{Rang}(A^n) \geq \text{Rang}(A^{n+1})$ für jedes $n = 1, 2, 3, \dots$	×	
i) Für jeden 2-dimensionalen Unterraum $U$ von $\mathbb{R}^3$ gibt es eine Matrix $A$ mit $\text{im}(A) = U = \text{ker}(A)$ .		×
j) $AB = \mathbb{I}$ impliziert auch $BA = \mathbb{I}$ für quadratische Matrizen $A$ und $B$ .	×	
$AB = 0$ impliziert auch $BA = 0$ für quadratische Matrizen $A$ und $B$ .		×

**Bitte wenden!**

2. [10 Punkte] Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5a \\ 3+2b & 1 & 2-3a \\ -3-2b & 2 & -2+3a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}.$$

- a) [2 Punkte] Welche Bedingungen müssen  $a, b$  erfüllen, damit die Matrix  $A$  singular wird?
- b) [3 Punkte] Finden Sie eine Basis für das Bild von  $A$  (in Abhängigkeit der Parameter  $a, b$ ).
- c) [1 Punkt] Für welche Werte von  $a$  und  $b$  ist  $A$  symmetrisch?
- d) [4 Punkte] Sei  $A$  nun die symmetrische Matrix aus c) (also mit den in c) gefundenen Werten eingesetzt). Bestimmen Sie, für welche Werte  $n = 0, 1, 2, \dots$  die Matrix  $A^n$  positiv definit ist.

**Lösung:**

- a) Wir errechnen zuerst  $\det(A)$ ; z.B. mit der Regel von Sarrus oder entwickeln nach der 2. Spalte oder .... Man kann sich die Arbeit auch ein wenig erleichtern, indem man zuerst den folgenden Gauss-Schritt (der die Determinante nicht verändert) durchführt

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -5a \\ 3+2b & 1 & 2-3a \\ -3-2b & 2 & -2+3a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5a \\ 3+2b & 1 & 2-3a \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

In allen Fällen erhält man (vereinfacht)  $\det(A) = -30ab - 30$ . Die Matrix  $A$  ist singular genau dann wenn  $\det(A) = 0$ , also wenn  $ab = -1$ .

- b) Es gibt 2 Fälle:

$ab \neq -1$ : Dann ist  $A$  invertierbar, das Bild also ganz  $\mathbb{R}^3$  und eine Basis ist z.B. die Standardbasis.

$ab = -1$ : Dann ist  $A$  singular und das Bild folglich höchstens 2-dimensional. Das Bild ist aber auch mindestens 2-dimensional, denn die ersten beiden Spaltenvektoren  $a_1, a_2$  von  $A$  sind linear unabhängig. Beweis:

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 3+2b \\ -3-2b \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 & \text{wegen 1. Zeile} \\ \lambda_1 = 0 & \text{wegen } \lambda_1 = 0 \text{ und } a_2 \neq 0 \end{cases}$$

Somit ist  $\{a_1, a_2\}$  eine Basis von  $\text{im}(A)$  (genauso ist auch  $\{a_2, a_3\}$  eine Lösung,  $\{a_1, a_3\}$  allerdings nicht).

- c) Damit  $A$  (mit Einträgen  $a_{ij}$ ) symmetrisch ist, muss  $a_{12} = a_{21}$ ,  $a_{13} = a_{31}$  und  $a_{23} = a_{32}$  gelten. Die dritte Gleichung ( $2 - 3a = 2$ ) impliziert  $a = 0$ , die erste Gleichung ( $0 = 3 + 2b$ ) impliziert  $b = -3/2$  und diese Werte erfüllen auch die zweite Gleichung.

**Siehe nächstes Blatt!**

**d)** Mit den Werten aus c) erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Alle Matrizen  $A^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  sind symmetrisch und eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte positiv sind. Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte von  $A$ , also die Nullstellen von  $\det(A - \lambda \mathbb{I})$ . Mit der Regel von Sarrus oder entwickeln nach der 1. Spalte erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda \mathbb{I}) &= (5 - \lambda)(1 - \lambda)(-2 - \lambda) - 2 \cdot 2 \cdot (5 - \lambda) \\ &= (5 - \lambda)(\lambda^2 + \lambda - 6) \end{aligned}$$

und die Nullstellen/Eigenwerte sind also  $\lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -3$ .  $A$  ist also nicht positiv definit.

Nun gilt ganz allgemein; hat  $A$  den Eigenwert  $\lambda$ , so hat  $A^n$  den Eigenwert  $\lambda^n$ . Die symmetrische Matrix  $A^n$  hat somit die Eigenwerte  $\lambda_1 = 5^n, \lambda_2 = 2^n, \lambda_3 = (-3)^n$  welche genau dann alle positiv sind, wenn  $n$  gerade ist (denn dann ist  $(-3)^n > 0$ ).

Bemerkung: Es ist nicht nötig die Eigenvektoren von  $A$  auszurechnen, um diese Aufgabe zu lösen.

**3. [10 Punkte]** Seien

$$v_1 = (1, 1, 1)^\top, \quad v_2 = (1, 2, 3)^\top, \quad v_3 = (1, 4, 9)^\top.$$

- a) **[5 Punkte]** Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf  $v_1, v_2, v_3$  an (in dieser Reihenfolge), um eine Orthonormalbasis zu erhalten.
- b) **[3 Punkte]** Was sind die Koordinaten von  $w = (\sqrt{3} + \sqrt{6}, \sqrt{6} - 2\sqrt{3}, \sqrt{3} + \sqrt{6})^\top$  bezüglich der in a) erhaltenen Basis?
- c) **[2 Punkte]** Berechnen Sie die (euklidische) Norm von  $w$  und geben Sie das Resultat in wurzelfreier Form an.

**Lösung:**

- a) Den ersten Vektor  $v_1$  brauchen wir nur zu normieren um den ersten Vektor  $b_1$  der Orthonormalbasis (ONB) zu erhalten:

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad b_1 = \left( \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^\top.$$

Nach dem Gram-Schmidtschen Verfahren, erhalten wir die noch nicht normierte Version des 2. Basisvektors  $b'_2$  durch  $b'_2 = v_2 - \langle b_1, v_2 \rangle b_1$ ,

$$\langle b_1, v_2 \rangle = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad b'_2 = v_2 - 2\sqrt{3} b_1 = (1, 2, 3)^\top - (2, 2, 2)^\top = (-1, 0, 1)^\top$$

und damit

$$\|b'_2\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad b_2 = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^\top.$$

Die nicht normierte Version  $b'_3$  des 3. Basisvektors errechnet sich durch  $b'_3 = v_3 - \langle b_1, v_3 \rangle b_1 - \langle b_2, v_3 \rangle b_2$ . Wir haben  $\langle b_1, v_3 \rangle = \frac{14}{\sqrt{3}}$ ,  $\langle b_2, v_3 \rangle = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$  und damit

$$b'_3 = (1, 4, 9)^\top - \frac{14}{3}(1, 1, 1)^\top - (-4, 0, 4)^\top = \left( \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)^\top.$$

Und noch normieren

$$\|b'_3\| = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \Rightarrow \quad b_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^\top.$$

- b) Die Koordinaten/der Koordinatenvektor eines Vektors  $w$  bezüglich einer ONB  $\{b_1, b_2, b_3\}$  ist  $(\langle w, b_1 \rangle, \langle w, b_2 \rangle, \langle w, b_3 \rangle)^\top$ .

$$\langle w, b_1 \rangle = 1 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} - 2 + 1 + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 3 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{2}$$

$$\langle w, b_2 \rangle = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\langle w, b_3 \rangle = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + 1 - 2 + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + 1 = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}\sqrt{3} = 3\sqrt{2}$$

Der Koordinatenvektor ist also  $(3\sqrt{2}, 0, 3\sqrt{2})^\top$ .

- c) Man könnte die Norm von  $w$  direkt bestimmen, aber wir können einfacher die Norm des Koordinatenvektors aus b) berechnen. Denn Basis-/Koordinatenwechsel von einer ONB in eine Andere verändert die Norm nicht.

$$\|w\| = \|(3\sqrt{2}, 0, 3\sqrt{2})^\top\| = \sqrt{9 \cdot 2 + 9 \cdot 2} = 6$$

**4. [10 Punkte]** Gegeben sei das Differentialgleichungssystem 2. Ordnung

$$\begin{aligned}y''(t) &= -2y(t) + z(t) \\ z'(t) &= -6y(t) + 3z(t).\end{aligned}$$

- a) **[2 Punkte]** Verwandeln Sie dies in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung. Welche Dimension hat der Lösungsraum dieses Systems?
- b) **[5 Punkte]** Geben Sie die allgemeine Lösung des in a) gefundenen Systems an.
- c) **[3 Punkte]** Bestimmen Sie die Lösung zu den Bedingungen  $y'(0) = 1$ ,  $y(0) = 2$ ,  $z(0) = 5$ .

**Lösung:**

- a) Mit  $y'(t) = x(t)$  erhalten wir für die erste Gleichung in der Aufgabenstellung  $y''(t) = x'(t) = -2y(t) + z(t)$  und damit als System 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Die Dimension des Lösungsraums ist 3.

- b) Wir müssen zuerst die EW (Eigenwerte) der Koeffizientenmatrix bestimmen.

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & -6 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(3-\lambda) - 6 - (3-\lambda)(-2) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda.$$

Die erste offensichtliche Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist also  $\lambda_1 = 0$ . Für die weiteren Nullstellen bleibt die quadratische Gleichung  $-\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$  zu lösen und wir erhalten  $\lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = 2$ .

EV zum EW  $\lambda_1 = 0$  ist z.B.  $(0, 1, 2)^\top$ .

EV zum EW  $\lambda_2 = 1$  ist z.B.  $(1, 1, 3)^\top$ .

EV zum EW  $\lambda_3 = 2$  ist z.B.  $(2, 1, 6)^\top$ .

Damit erhalten wir als allgemeine Lösung des Systems 1. Ordnung

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

wobei  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  beliebig.

- c) Setzen wir  $t = 0$  in der allgemeinen Lösung, so erhalten wir, mit den geforderten Anfangsbedingungen, das folgende Gleichungssystem für  $c_1, c_2, c_3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

welches die eindeutige Lösung  $c_1 = c_2 = 1$ ,  $c_3 = 0$  hat. Daher also  $y(t) = 1 + e^t$ ,  $z(t) = 2 + 3e^t$  (und  $y'(t) = x(t) = e^t$ ).

**Siehe nächstes Blatt!**



**5. [10 Punkte]** Gegeben sei die quadratische Form

$$q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad q(x) = -\frac{1}{2}x_1^2 + \sqrt{3}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 \quad \text{wobei } x = (x_1, x_2)^\top.$$

- a) **[1 Punkt]** Finden Sie eine symmetrische Matrix  $A$ , so dass  $q(x) = x^\top Ax$  gilt.
- b) **[5 Punkte]** Führen Sie die Hauptachsentransformation  $y = Tx$  durch und geben Sie die Normalform von  $q$  an.
- c) **[4 Punkte]** Welche Punkte auf dem Kegelschnitt  $\{x \mid q(x) = 1\}$  sind dem Nullpunkt am nächsten?
- Hinweis:* Beantworten Sie diese Frage zuerst im  $y$ -Koordinatensystem der Hauptachsen.

**Lösung:**

- a) Die einzige symmetrische Matrix, die dies erfüllt ist

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

- b) Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte (EW) und dann die Eigenvektoren (EV) von  $A$ .

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}) = (-1/2 - \lambda)(1/2 - \lambda) - 3/4 = \lambda^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

EV zum EW  $\lambda_1 = 1$ : zu lösen ist

$$\begin{pmatrix} -3/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -3/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Und somit ist  $(1, \sqrt{3})^\top$  ein EV welcher den Eigenraum aufspannt.

EV zum EW  $\lambda_2 = -1$ : (Bemerkung: da  $A$  symmetrisch ist, könnten wir auch einfach einen Vektor wählen, der senkrecht auf dem zuvor gefundenen EV steht.)

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Und somit ist  $(\sqrt{3}, -1)^\top$  ein EV welcher den Eigenraum aufspannt.

Wir normieren die beiden EVen noch, ordnen sie in einer Matrix an und erhalten

$$T^\top = 1/2 \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir können an den Eigenwerten direkt ablesen, dass die Normalform von  $q$  im  $y = (y_1, y_2)^\top$ -Koordinatensystem  $y_1^2 - y_2^2$  ist, oder rechnen

$$q(y) = (T^\top y)^\top A (T^\top y) = y^\top (T A T^\top) y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_1^2 - y_2^2,$$

denn  $T A T^\top$  ist ja gerade die Diagonalmatrix aus der Diagonalisierung von  $A$ .

Natürlich darf man die Eigenvektoren auch in anderer Reihenfolge in  $T$  (bzw.  $T^\top$ ) eintragen und erhält als Normalform dann  $-y_1^2 + y_2^2$ .

**Siehe nächstes Blatt!**



- c) Die Menge  $\{x \mid q(x) = 1\}$  lautet im  $y$ -Koordinatensystem  $\{y \mid q(y) = y_1^2 - y_2^2 = 1\}$ . Die Punkte die in  $y$ -Koord. dem Nullpunkt am nächsten sind, entsprechen (über  $Ty = x$ ) den Punkten in  $x$ -Koord. welche dem Nullpunkt am nächsten sind. Denn die Abbildung  $T$  ist orthogonal und verändert somit die Abstände nicht.

Um nun zu bestimmen, welche Punkte in  $\{y \mid y_1^2 - y_2^2 = 1\}$  dem Ursprung am nächsten liegen, kann man z.B. ganz knapp argumentieren: Damit  $y_1^2 - y_2^2 = 1$  ist, muss also  $|y_1|$  bzw.  $y_1^2$  grösser oder gleich 1 sein (denn  $-y_2^2$  ist nie positiv). Wählen wir  $y_1 = 1$  oder  $y_1 = -1$  und setzen  $y_2 = 0$ , dann sind das Punkte mit Abstand 1 zum Ursprung und somit die, welche diesem am nächsten liegen (alle anderen Punkte in der Menge haben  $|y_1| > 1$  und somit Betrag auch  $> 1$ ). Alternativ kann man auch die  $y_1$  Koordinate in Abhängigkeit der  $y_2$  Koordinate ausdrücken:  $y_1^2 = 1 + y_2^2 \Rightarrow y_1 = \pm\sqrt{1 + y_2^2}$ . Das heisst, die Punkte in  $\{y \mid y_1^2 - y_2^2 = 1\}$  sind von der Form  $(\pm\sqrt{1 + y_2^2}, y_2)^\top$  für beliebige Werte von  $y_2$  und die Norm davon ist  $\sqrt{1 + 2y_2^2}$ . Das Minimum davon ist offensichtlich für  $y_2 = 0$  angenommen und wir erhalten wiederum die Punkte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzgl. } y\text{-Koordinaten.}$$

In  $x$ -Koordinaten ergibt dies

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Hier noch eine Skizze der Menge  $\{x \mid q(x) = 1\}$  und der Punkte die dem Ursprung am nächsten liegen.

