

# Repetition: Schreibweisen

Ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
 \dots &= \dots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m
 \end{aligned}$$

Erweiterte Matrix

$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$	$1$
$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1n}$	$b_1$
$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2n}$	$b_2$
	$\dots$			$\dots$
$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mn}$	$b_m$

## Matrixschreibweise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

wobei

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

# Elementare Zeilenumformungen für die erweiterte Matrix

- (I) Vertauschen zweier Zeilen
- (II) Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer andern

und gegebenenfalls noch

- (III) Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl  $\neq 0$

# Der Gauss-Algorithmus für die erweiterte Matrix

## Beschreibung des Gauss-Algorithmus

- 1 Bestimme die am weitesten links stehende Spalte, die von Null verschiedene Elemente enthält.
- 2 Ist die oberste Zahl in der in Schritt 1 gefundenen Spalte Null, so vertausche man die erste Zeile mit einer andern, wo keine Null steht (Pivot).
- 3 Addiere ein passendes Vielfaches der obersten Zeile zu den übrigen Zeilen, um unterhalb des Pivots Nullen zu erzeugen.
- 4 Wende Schritt 1 bis 3 auf die Untermatrix an, die durch Streichen der ersten Zeile entsteht, und zwar solange, bis es nicht mehr geht. Dann ist die **Zeilenstufenform** erreicht.
- 5 Bestimme die Lösungsmenge durch Rückwärtseinsetzen.

Die folgende Definition bezieht sich auf die Zeilenstufenform:

## Definition

Eine Variable  $x_k$  über einem Pivot heisst **Pivot-Variable** oder **führende Variable**. Alle übrigen Variablen heissen **freie Variablen** oder **freie Parameter**.

**Bemerkung.** Beim Rückwärtseinsetzen gilt:

- ▶ Nach Pivot-Variablen kann man auflösen.
- ▶ Freie Variablen kann man frei wählen.