

Rechenregeln

Im folgenden Satz nehmen wir an, dass alle vorkommenden Operationen für die Matrizen A, B, C, D definiert sind.

Satz

- ▶ Kommutativgesetz Addition: $A + B = B + A$
- ▶ Assoziativgesetz Addition: $(A + B) + C = A + (B + C)$
- ▶ Assoziativgesetz Multiplikation: $(AB)C = A(BC)$
- ▶ Distributivgesetz: $(A + B)C = AC + BC$ und $A(C + D) = AC + AD$

Ferner für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

- ▶ $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- ▶ $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

ACHTUNG: Im Allgemeinen ist $AB \neq BA$.

Kronecker-Symbol

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Insbesondere gilt

$$(\mathbb{I})_{ij} = \delta_{ij}$$

Repetition

Lineare Algebra

Rechenregeln

Kronecker-Symbol

Spalten und Zeilen

Transpositionsregeln

Inverse Matrix

Spalten- und Zeilenstruktur

Spaltenstruktur

Sind $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ m -Spaltenvektoren (d.h. $m \times 1$ -Matrizen), so bezeichnet

$$A = (a^{(1)} \dots a^{(n)})$$

die $m \times n$ -Matrix mit $a^{(i)}$ als i -te Spalte.

Zeilenstruktur

Sind $a^{[1]}, \dots, a^{[m]}$ n -Zeilenvektoren (d.h. $1 \times n$ -Matrizen), so bezeichnet

$$A = \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ \vdots \\ a^{[m]} \end{pmatrix}$$

die $m \times n$ -Matrix mit $a^{[i]}$ als i -te Zeile.

Spaltenstruktur:

$$\left(\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{array} & \begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{array} & \dots & \begin{array}{c} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{array} \\ \hline a^{(1)} & a^{(2)} & & a^{(n)} \end{array} \right)$$

Zeilenstruktur:

$$\left(\begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline \end{array} \leftarrow a^{[1]} \\ \begin{array}{c|c|c|c} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \end{array} \leftarrow a^{[2]} \\ \vdots \\ \begin{array}{c|c|c|c} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ \hline \end{array} \leftarrow a^{[m]} \end{array} \right)$$

Spaltenstruktursatz

Sei $A = (a^{(1)} \dots a^{(n)})$ eine $m \times n$ -Matrix mit Spalten $a^{(i)}$,
 $B = (b^{(1)} \dots b^{(p)})$ eine $n \times p$ -Matrix mit Spalten $b^{(i)}$,

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein n -Spaltenvektor und $e^{(i)}$ die i -te Spalte von

\mathbb{I}_n . Dann gilt

- ▶ $Ae^{(i)} = a^{(i)}$
- ▶ $Ax = x_1 a^{(1)} + \dots + x_n a^{(n)}$ (**Linearkombination**)
- ▶ $AB = (Ab^{(1)} \dots Ab^{(p)})$

Zeilenstruktursatz

Sei $A = \begin{pmatrix} a^{[1]} \\ \vdots \\ a^{[m]} \end{pmatrix}$ eine $m \times n$ -Matrix mit Zeilen $a^{[i]}$,

$B = \begin{pmatrix} b^{[1]} \\ \vdots \\ b^{[n]} \end{pmatrix}$ eine $n \times p$ -Matrix mit Zeilen $b^{[i]}$, $y = (y_1 \dots y_n)$

ein n -Zeilenvektor und $e^{[i]}$ die i -te Zeile von \mathbb{I}_n . Dann gilt

- ▶ $e^{[i]}B = b^{[i]}$
- ▶ $yB = y_1 b^{[1]} + \dots + y_n b^{[n]}$ (**Linearkombination**)

- ▶ $AB = \begin{pmatrix} a^{[1]}B \\ \vdots \\ a^{[m]}B \end{pmatrix}$

Transpositionsregeln

Es seien A, B Matrizen, so dass die Operationen definiert sind. Dann gilt:

- ▶ $(A^T)^T = A$
- ▶ $(A + B)^T = A^T + B^T$
- ▶ $(AB)^T = B^T A^T$

Definition

- ▶ Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Dann heißt A **invertierbar** oder **regulär** falls eine $n \times n$ -Matrix X existiert, so dass $AX = \mathbb{I}_n$. X heißt dann **Inverse** von A .
- ▶ Falls A nicht regulär ist, nennt man A **singulär**.

Lemma: Eindeutigkeit

Falls A invertierbar ist, so ist die Inverse eindeutig bestimmt und wird mit A^{-1} bezeichnet.

Bemerkungen: Sei A eine reguläre $n \times n$ -Matrix. Dann gilt:

- ▶ Die Lösung von $Ax = b$ ist gegeben durch $x = A^{-1}b$.
- ▶ Bezeichnen wir mit $e^{(k)}$ die k -te Spalte von \mathbb{I}_n , so ist die k -te Spalte von A^{-1} die Lösung von $Ax = e^{(k)}$.