Definition

- Sei A eine $n \times n$-Matrix. Dann heisst A **invertierbar** oder **regulär** falls eine $n \times n$-Matrix X existiert, so dass $AX = \mathbb{I}_n$. X heisst dann **Inverse** von A.
- Falls A nicht regulär ist, nennt man A **singulär**.

Bemerkungen: Sei A eine reguläre $n \times n$-Matrix. Dann gilt:

- Die Inverse ist eindeutig bestimmt.
- Die Lösung von $Ax = b$ ist gegeben durch $x = A^{-1}b$.
- Bezeichnen wir mit $e^{(k)}$ die k-te Spalte von $\mathbb{I}_n$, so ist die k-te Spalte von A^{-1} die Lösung von $Ax = e^{(k)}$.

Gauss-Jordan Algorithmus zur Berechnung von A^{-1}

Sei A eine $n \times n$-Matrix. Führe das Gauss-Verfahren für die erweiterte Matrix

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right)$$

aus. Ist Rang $A = n$ (und somit A invertierbar), so können mit Hilfe der Zeilenoperation (III) alle Pivots auf den Wert 1 normiert, und mit der Zeilenoperation (II) über den Pivots Nullen erzeugt werden. Danach steht im Schema linkerhand die Einheitsmatrix, und rechterhand A^{-1}.

Beispiel

Wir bestimmen die Inverse von $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Startend von

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

liefert das beschriebene Verfahren

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Somit $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Sätze

Satz

Sind A und B invertierbare $n \times n$-Matrizen, so gilt

1. $A^{-1}A = \mathbb{I}_n$.
2. A^{-1} ist invertierbar und $(A^{-1})^{-1} = A$.
3. $\mathbb{I}$ ist invertierbar und $\mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$.
4. AB ist invertierbar und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
5. A^T ist invertierbar und $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

Satz

Für jede $n \times n$-Matrix A sind äquivalent:

1. A ist invertierbar.
2. Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist für jedes b lösbar.
3. Das Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung.

Orthogonale Matrizen

Definition

Eine $n \times n$-Matrix heisst **orthogonal**, falls $A^T A = \mathbb{I}_n$ gilt.

Satz

Sind A und B orthogonale $n \times n$-Matrizen, so gilt:

1. A ist invertierbar und $A^{-1} = A^T$.
2. A^{-1} ist orthogonal.
3. AB ist orthogonal.
4. $\mathbb{I}_n$ ist orthogonal.

Beispiele

Givens-Rotation

$$U(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

ist für beliebiges $\varphi \in \mathbb{R}$ eine orthogonale Matrix.

Householder-Matrix

Sei u ein n-Spaltenvektor mit $u^T u = 1$. Dann ist

$$Q(u) := \mathbb{I}_n - 2uu^T$$

eine orthogonale Matrix.

Beobachtung

Sei A eine $n \times n$-Matrix. Dann ist äquivalent:

1. A ist orthogonal.
2. Die Spalten von A sind Einheitsvektoren und stehen paarweise senkrecht aufeinander.
3. Die Zeilen von A sind Einheitsvektoren und stehen paarweise senkrecht aufeinander.

Eigenschaften

Orthogonale Matrizen beschreiben Isometrien

Ist A eine orthogonale $n \times n$-Matrix, so gilt für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Ax\| = \|x\|$$

Insbesondere erhält $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto Ax$, die Abstände von Punkten, ist also eine Kongruenzabbildung:

$$\|Ax - Ay\| = \|x - y\|$$