

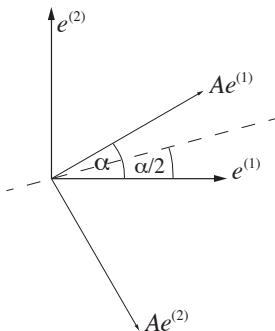
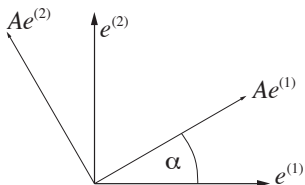
Drehungen und Spiegelungen in \mathbb{R}^2

Ist A eine orthogonale 2×2 -Matrix, so ist A von der Form

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ Drehung um den Winkel } \alpha$$

oder

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \text{ Spiegelung an Achse mit Steigung } \frac{\alpha}{2}$$



Givens-Rotation

$$U(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

beschreibt eine Drehung im \mathbb{R}^3 um den Winkel α um die Achse x_2 .

LR-Zerlegung

Frage: Wie löst man effizient $Ax = b$ für viele verschiedene b ?

Idee (zunächst für $n \times n$ Matrizen): Zerlege $A = LR$ mittels Gauss-Algorithmus in ein Produkt einer Linksdreiecksmatrix L und einer Rechtsdreiecksmatrix R .

Dann ist $Ax = b$ wie folgt lösbar:

1. Löse $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen
2. Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

LR-Zerlegung

Frage: Wie löst man effizient $Ax = b$ für viele verschiedene b ?

Idee: Zerlege $A = LR$ mittels Gauss-Algorithmus in ein Produkt einer Linksdreiecksmatrix L und einer Rechtsdreiecksmatrix R .

Dann ist $Ax = b$ wie folgt lösbar:

1. Löse $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen
2. Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

Denn dann gilt $Ax = LRx$

LR-Zerlegung

Frage: Wie löst man effizient $Ax = b$ für viele verschiedene b ?

Idee: Zerlege $A = LR$ mittels Gauss-Algorithmus in ein Produkt einer Linksdreiecksmatrix L und einer Rechtsdreiecksmatrix R .

Dann ist $Ax = b$ wie folgt lösbar:

1. Löse $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen
2. Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

Denn dann gilt $Ax = LRx = Ly$.

LR-Zerlegung

Frage: Wie löst man effizient $Ax = b$ für viele verschiedene b ?

Idee: Zerlege $A = LR$ mittels Gauss-Algorithmus in ein Produkt einer Linksdreiecksmatrix L und einer Rechtsdreiecksmatrix R .

Dann ist $Ax = b$ wie folgt lösbar:

1. Löse $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen
2. Löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen

Denn dann gilt $Ax = LRx = Ly = b$.

LR-Zerlegung

Beispiel

Erster Eliminationsschritt:

$$\begin{array}{ccc} A = A_0 & & A_1 \\ \begin{array}{ccc} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{array} & \begin{array}{l} \cdot(-3) \quad \oplus \\ \leftarrow \\ \oplus \\ \leftarrow \\ \oplus \end{array} & \begin{array}{l} \cdot(+1) \\ \oplus \\ \leftarrow \\ \oplus \\ \leftarrow \\ \oplus \end{array} \\ & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{green}} \\ \xleftarrow{\text{red}} \end{array} & \begin{array}{ccc} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -8 & 5 \end{array} \begin{array}{l} \cdot(+3) \quad \oplus \\ \leftarrow \\ \oplus \\ \leftarrow \\ \oplus \end{array} \cdot(-1) \end{array}$$

Wegen des Zeilenstruktursatzes gilt

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ +1 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_0 \quad \text{und} \quad A_0 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=: L_1} A_1$$

Zweiter Eliminationsschritt:

$$\begin{array}{ccc}
 A_1 & & A_2 \\
 \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -8 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{grün}} \\ \xleftarrow{\text{rot}} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
 \text{·(+2)} \quad \oplus & & \text{·(-2)} \quad \oplus
 \end{array}$$

Wiederum

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & +2 & 1 \end{pmatrix} A_1 \quad \text{und} \quad A_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_{=: L_2} A_2$$

Zusammen also

$$A = A_0 = L_1 A_1 = L_1 L_2 A_2$$

so dass mit $L := L_1 L_2$ und $R := A_2$ die gewünschte Zerlegung $A = LR$ gefunden ist:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \\ -2 & -7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ +3 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Eine Matrix mit lauter 1 auf der Diagonalen und nur unterhalb einer solchen 1 in einer Spalte von 0 verschiedenen Koeffizienten, heisst **Frobenius-Matrix**. Diese Matrizen haben ein besonders einfaches Inverses. Z.B.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -a_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_{n2} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeiner gilt: Das Produkt von Frobenius-Matrizen $L_1 L_2 \dots L_k$ wobei die Nummer der besetzten Spalte beim Übergang von L_i zu L_{i+1} nicht kleiner werden darf, ist einfach die Summe der Faktoren, wobei man die Diagonale wieder mit 1 überschreibt.

Die Faktoren L_i beim Herstellen der LR-Zerlegung sind gerade Frobenius-Matrizen. Mit ihnen lässt sich ein Eliminationschritt (Nullen unter einem Pivot erzeugen mit Zeilenoperationen II) darstellen.

Satz 2.10

Sei A eine $m \times n$ -Matrix. Die Durchführung des Gaußalgorithmus sei möglich ohne Vertauschen von Zeilen.

Dann liefert das Gaussverfahren, angewandt auf A :

- ▶ eine invertierbare $m \times m$ -Linksdreiecksmatrix $L = (\ell_{kj})$ mit Einsen auf der Diagonale und
- ▶ eine $m \times n$ -Matrix R in Zeilenstufenform (Endschema) so dass gilt

$$LR = A$$

Beim Gaussverfahren wird das ℓ_{kj} -fache der Zeile j von Zeile k subtrahiert, um in Zeile k unter dem j -ten Pivot eine Null zu erzeugen.

Kompakte Schreibweise

Um Speicherplatz/Schreibarbeit zu sparen, werden bei der LR-Zerlegung beide Matrizen, also die Linksdreiecksmatrix L und die Zeilenstufenformmatrix R in einer einzigen Matrix abgespeichert: Statt

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ 0 & 0 & r_{33} & \dots & r_{3m} \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_{nm} \end{pmatrix}$$

speichert/schreibt man lediglich

$$\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1m} \\ \ell_{21} & r_{22} & r_{23} & \dots & r_{2m} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & r_{33} & \dots & r_{3m} \\ \dots & & & & \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \dots & & r_{nm} \end{pmatrix}$$

Ersparnis:

Die Nullen in L und R und die Einsen auf der Diagonale von L werden nicht mitgespeichert.

Bemerkung

- ▶ Falls $m = n$, so ist R eine Rechtsdreiecksmatrix.
- ▶ $A = LR$ ist invertierbar $\iff R$ ist invertierbar.

Anwendung

Sei A eine $m \times n$ -Matrix. Der Gaußalgorithmus für A sei ohne Zeilenvertauschung möglich. Dann kann man $Ax = b$ wie folgt lösen:

1. Bestimme die LR-Zerlegung $A = LR$.
2. Löse $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen.
3. Bestimme die Lösungsmenge von $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen.

Definition

Eine $n \times n$ -Matrix P heisst **Permutationsmatrix**, falls sie aus \mathbb{I}_n durch Vertauschung von Zeilen hervorgegangen ist.

Beispiel

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{[3]} \\ e^{[1]} \\ e^{[2]} \end{pmatrix}$$

Bemerkung

- ▶ Jede Permutationsmatrix ist orthogonal.
- ▶ In jeder Zeile und in jeder Spalte steht genau eine 1.
- ▶ In PA erscheinen die Zeilen von A so vertauscht, wie es die Zeilen von P sind.