

Lemma

Ist A eine Dreiecksmatrix, so ist die Determinante von A das Produkt der Diagonalelemente.

Satz

Transponieren ändert die Determinante nicht:

$$\det A = \det A^T$$

Korollar

- i. Vertauscht man zwei Spalten von A , so wechselt die Determinante das Vorzeichen.
- ii. Addiert man ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen so ändert sich die Determinante nicht.

Die Determinante ist als Funktion jeder Spalte linear, d.h.

- iii. $\det \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & \alpha a^{(i)} & \dots & a^{(n)} \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & a^{(i)} & \dots & a^{(n)} \end{pmatrix}$ und
- iv. $\det \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & a^{(i)} + b^{(i)} & \dots & a^{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & a^{(i)} & \dots & a^{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a^{(1)} & a^{(2)} & \dots & b^{(i)} & \dots & a^{(n)} \end{pmatrix}$

Allgemeiner Entwicklungssatz

- ▶ Entwicklung nach der Spalte j

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

- ▶ Entwicklung nach der Zeile i

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Produktsatz

Sind A und B zwei $n \times n$ -Matrizen, so gilt

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Korollar

Ist die Matrix A invertierbar, so ist $\det A \neq 0$ und

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Blockatz

Sei A eine $m \times m$ -Matrix, B eine $m \times n$ -Matrix und C eine $n \times n$ -Matrix. Dann gilt für die $(m+n) \times (m+n)$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det A \det C$$

Effektive Berechnung von Determinanten

Sei A eine $n \times n$ -Matrix und $PA = LR$ ihre LR-Zerlegung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det A &= \det P \det R = \\ &= (-1)^{\text{Anzahl Zeilenvertauschungen}} r_{11} r_{22} \cdots r_{nn} \end{aligned}$$

Determinante und Rang

Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Dann gilt

$$\det A \neq 0 \iff \text{Rang } A = n$$

Satz (Determinanten und LGS)

Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Dann sind äquivalent:

- i. A ist invertierbar
- ii. $\det A \neq 0$
- iii. $\text{Rang}(A) = n$
- iv. Das LGS $Ax = b$ ist für jedes b lösbar.
- v. Das LGS $Ax = b$ besitzt genau eine Lösung.
- vi. Das homogene LGS $Ax = 0$ besitzt nur die triviale Lösung.