Prof. Norbert Hungerbühler

Lineare Algebra I
ETH Zürich - D-MAVT

Lösung: Serie 1

1. ☑ Für $a = -1$ besitzt das Gleichungssystem keine Lösung.

   ☐ Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau zwei Lösungen.

   ☑ Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen.

   ☐ Für $a = 1$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.

   ☑ Für $a = 2$ besitzt das Gleichungssystem genau eine Lösung.

   Feedback for 1): Mit $a = -1$ erhalten wir die Gleichungen $-x + y = -1$ und $x - y = -1$. Multipliziert man die erste Gleichung beidseitig mit -1 (eine solche Operation lässt die Lösungsmenge natürlich unverändert) so erhalten wir das widersprüchliche Gleichungssystem: $x - y = 1$ und $x - y = -1$.
   Feedback for 2): Ein LGS hat entweder **keine**, **genau eine** oder aber **unendlich viele** Lösungen. Achtung: Ein Paar (x, y) welches das LGS erfüllt zählt als **eine** Lösung, nicht etwa als zwei Lösungen.
   Feedback for 3): Für $a = 1$ ist jedes Paar $(x, y) = (\alpha, 1 - \alpha)$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Lösung des LGS.
   Feedback for 4): Für $a = 1$ sind beide Gleichungen $x + y = 1$. Also hat man nur eine lineare Gleichung, und ein solche kann nicht gleichzeitig die Werte zweier Variablen fixieren.
   Feedback for 5): Nach kurzer Rechnung folgt, dass $x = y = 2/3$ die einzige mögliche Lösung ist.

2.a) Mit dem Gauss–Algorithmus erhält man für **(i)** bzw. **(ii)** schrittweise ein einfacheres Gleichungssystem:

x_1	x_2	x_3	x_4	$a)$	$b)$
1	1	2	2	1	0
1	2	3	4	3	-3
1	3	6	10	2	2
1	4	10	20	2	1

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	$a)$	$b)$
1	1	2	2	1	0
0	1	1	2	2	-3
0	2	4	8	1	2
0	3	8	18	1	1

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	$a)$	$b)$
1	1	2	2	1	0
0	1	1	2	2	-3
0	0	2	4	-3	8
0	0	5	12	-5	10

$\rightarrow$

x_1	x_2	x_3	x_4	$a)$	$b)$
1	1	2	2	1	0
0	1	1	2	2	-3
0	0	2	4	-3	8
0	0	0	2	$\frac{5}{2}$	-10

Es folgt, indem man zuerst x_4, dann x_3, x_2 und x_1 ausrechnet:

(i) $x_4 = \frac{5}{4},\ x_3 = -4,\ x_2 = \frac{7}{2},\ x_1 = 3;$

(ii) $x_4 = -5,\ x_3 = 14,\ x_2 = -7,\ x_1 = -11.$

b) Der folgende Code löst die Aufgabe. Jede Zeile ist mit Enter abzuschliessen/einzugeben.

```
A=[ 1 1 2 2;
1 2 3 4;
1 3 6 10;
1 4 10 20];
b1=[1; 3; 2; 2];
b2=[0; -3; 2; 1];
x1=A\b1
x2=A\b2
```

3.a) Mit dem Gauss–Algorithmus bringt man zunächst das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{rrr|l} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|l} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 8 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|l} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{array}$$

Wir haben mehr Unbekannte als Gleichungen. In solchen Fällen gibt es entweder keine Lösung (wenn mehrere Gleichungen sich widersprechen, z.B. $x + y + z = 1$ und $x+y+z = 0$) oder unendlich viele. Hier hat man unendlich viele Lösungen: für jede Wahl von x_3 kann man ein passendes x_2 finden, so dass $-5x_2 + 5x_3 = 5$ gilt. Formell schreiben wir: $x_3 = t \in \mathbb{R}$ (t ist ein sogenannter **freier Parameter**). Daraus folgt

$$x_2 = \frac{5-5t}{-5} = t - 1 \text{ und } x_1 = 1 - 3(t-1) + t = 4 - 2t.$$

Die **Lösungsmenge** des Gleichungssystems ist also

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 4-2t \\ t-1 \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Der folgende Code löst die Aufgabe. Das Zeichen % markiert kommentierte Zeilen, die also nicht ausgeführt werden. Jede Zeile ist mit Enter abzuschliessen/einzugeben.

```
C=[3 4 2;
1 3 -1];
d=[8; 1];
x3=null(C,'r')
% null(C) berechnet eine nichttriviale Loesung des entsprechenden
% homogenen Gleichungssystems; die Option 'r' stellt sicher,
% dass die Loesung rational ist.
x4=C\d
% Die allgemeine Loesung ist von der Form c*x3+x4, wobei c
% eine beliebige reelle Zahl ist.
```

4. Man muss zeigen, dass man jede Operation vom Typ (I) - Zeilen vertauschen - durch eine Folge von Operationen vom Typ (II) ersetzen kann. Also angenommen man möchte die a-te und b-te Zeile vertauschen, dann kann man zum Beispiel wie folgt vorgehen:

Operation	Inhalt der a-ten Zeile	Inhalt der b-ten Zeile
	X	Y
zur Zeile b Zeile a hinzuaddieren	X	$X+Y$
von Zeile a Zeile b subtrahieren	$-Y$	$X+Y$
zur Zeile b Zeile a hinzuaddieren	$-Y$	$X.$

Bis auf das Vorzeichen in der Zeile a haben wir die gewünschte Vertauschung erreicht. Da Vorzeichen beim Gauss-Verfahren keine Rolle spielen, ist diese Konfiguration äquivalent zu derjenigen, in der Y in der a-ten Zeile und X in der b-ten Zeile steht.