Lösung: Serie 2

1. ☐ Jedes lineare Gleichungssystem mit mehr Gleichungen als Unbekannten hat keine Lösung.

   ☐ Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat mindestens eine Lösung.

   ☐ Jedes lineare Gleichungssystem mit der gleichen Anzahl von Gleichungen wie Unbekannten hat eine eindeutige Lösung.

   ☑ Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

   Feedback for 1): Doch, z.B. kann eine bereits im System vorhandene Gleichung beliebig oft hinzugefügt werden, ohne dass sich die Lösungsmenge ändert.
   Feedback for 2): Nein, z.B. hat das LGS $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1$ keine Lösung. Finden Sie ein Beispiel mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen.
   Feedback for 3): Nein, z.B. hat das LGS $0 \cdot x = a$ keine Lösung für $a \neq 0$ respektive unendlich viele Lösungen für $a = 0$.

2. Mit dem Gauss–Algorithmus bringt man zunächst das Gleichungssystem auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2b & 3a & b \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 0 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 3a & b \end{array} \quad (*)$$

   <u>Fall b = 0</u>: Zeilen vertauschen ergibt

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

   i) $\underline{a = 0}$: Die Lösungsmenge ist $x_3 = s,\ x_2 = t,\ x_1 = \frac{5}{3} - \frac{4}{3}s$ mit $s, t \in \mathbb{R}$.

   ii) $\underline{a \neq 0}$: Die Lösungsmenge ist $x_3 = 0,\ x_2 = t,\ x_1 = \frac{5}{3}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

   <u>Fall b ≠ 0</u>: Hier ist $-2b$ Pivot bei $(*)$:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 3 & 2b & 4 & 5 \\ 0 & -2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3a & b \end{array}$$

   i) $\underline{a = 0}$: In diesem Fall gibt es keine Lösung.

   ii) $\underline{a \neq 0}$: Die Lösung ist $x_3 = \frac{b}{3a},\ x_2 = 0,\ x_1 = \frac{5}{3} - \frac{4b}{9a}$.

   Folglich gilt **a)** falls $a = 0,\ b = 0$, **b)** falls $a \neq 0,\ b = 0$, **c)** falls $a \neq 0,\ b \neq 0$, **d)** falls $a = 0,\ b \neq 0$.

3.a) **a)** Damit K eine dimensionslose Zahl ist, müssen die Summen der Exponenten von cm, g und sec jeweils 0 ergeben. Dies entspricht dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} -3\alpha & + & \beta & + & 2\gamma & & & + & \varepsilon & = & 0 \\ \alpha & & & & & + & \delta & & & = & 0 \\ & & -\beta & & & & & - & 2\varepsilon & = & 0. \end{array}$$

Das entsprechende Gauss-Schema ist

$$\begin{array}{rrrrr} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \hline -3 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrr} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrr} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrrr} \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}$$

und man kann also δ und ε frei wählen. Setze $\delta = s, \varepsilon = t$ mit $s, t \in \mathbb{R}$. Für die restlichen Exponenten findet man

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2}t - \frac{3}{2}s, \\ \beta &= -2t, \\ \alpha &= -s. \end{aligned}$$

Die Formeln vom Typ

$$\rho^{-s} v^{-2t} \mathcal{O}^{\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}s} m^s a^t = K$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$ ergeben folglich das gewünschte Resultat.

b) **b)** Wenn man in die bei **a)** erhaltene Formel $s = t = 1$ setzt, findet man

$$\rho^{-1} v^{-2} \mathcal{O}^{-1} m a = K.$$

Nach Umformen ergibt dies

$$ma = K\rho v^2 \mathcal{O}.$$

Aus der Formel $F = ma$ folgt also $F = K\rho v^2 \mathcal{O}$.

Bemerkung: Die Konstante K nennt man *Widerstandsbeiwert*.

4.a) Für $i = 1, 2$ entspricht $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_i$ einem linearen Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten x_1, x_2, x_3. Wie in Serie 1, Aufgabe 2, kann man beide rechten Seiten im gleichen Gauss-Schema schreiben (der Hauptteil ist gleich):

$$\begin{array}{rrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 3 & -2 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline -1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 12 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & b_1 & b_2 \\ \hline 1 & -2 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

Für b_1 folgt also:

x_3 beliebig, also $x_3 = t \in \mathbb{R}$ ist ein freier Parameter,
$x_2 + 2x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 - 2t,$
$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -1 \Rightarrow x_1 = -1 + 3t + 2(1 - 2t) = 1 - t.$

Die Lösungsmenge von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ ist also

$$L_1 = \left\{ (1 - t, 1 - 2t, t)^\top \in \mathbb{R}^3 \middle| t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für b_2 folgt analog

x_3 beliebig, also $x_3 = s \in \mathbb{R}$ ist ein freier Parameter,
$x_2 + 2x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = 3 - 2s$,
$x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2 \Rightarrow x_1 = -2 + 3s + 2(3 - 2s) = 4 - s$.

Die Lösungsmenge von $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ ist somit

$$L_2 = \left\{(4 - s, 3 - 2s, s)^\top \in \mathbb{R}^3 \middle| s \in \mathbb{R}\right\}.$$

b)
```
A=[3 -2 -1;
-1 2 3];
b1=[1; 1];
b2=[6; 2];
x0=null(A,'r')
x1= A\b1
x2= A\b2
% Die allgemeine Loesung für bi (i=1,2) ist von der Form c*x0+xi,
% wobei c eine beliebige reelle Zahl ist.
```

5. http://www.lemuren.math.ethz.ch/coursesupport/exercise/linalg.