# Serie 7

**1.** Gegeben seien:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) $A_1$ ist orthogonal.
   i) ✗ richtig
   ii) ✓ falsch

b) $A_2$ ist orthogonal.
   i) ✓ richtig
   ii) ✗ falsch

**Lösung**

a) Eine Matrix ist genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten orthonormal sind. Bei $A_1$ sind die Spalten nicht orthogonal (das Skalarprodukt ist 1 statt 0) und die zweite Spalte ist nicht normiert (Norm ist $\sqrt{2}$ statt 1).

b) Bei $A_2$ sind die Spalten orthonormal.

**2.** Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von $A$.

(b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe von a) für die rechte Seite

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

(c) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von $A$ mit Matlab.

**Lösung**

(a)

$$\begin{array}{r|rrr|} \hline & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \\ -1 & -2 & 5 & 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{r|rrr|} \hline & 2 & -2 & 1 \\ & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|rrr|} \hline 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) (i) Zuerst lösen wir $Lc = b$ durch Vorwärtseinsetzen:

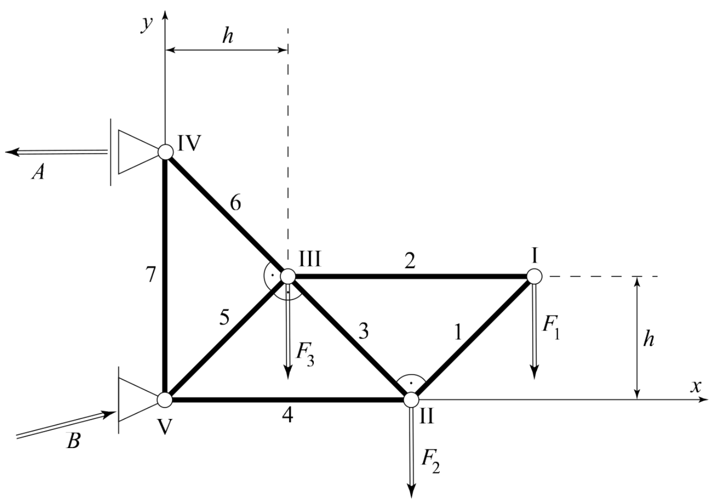
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) Dann lösen wir $Rx = c$ durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c)
```
A=[ 2 -2 1; 4 -3 3; -2 5 1]
[L,R,P]=lu(A)
% fuer eine Loesung ohne Permutationsmatrix
% (siehe Abschnitt "[L,U,P] = LU(A,THRESH)" in
% der Matlab-Hilfe (>> help lu) zum Befehl lu):
[L,R,P]=lu(sparse(A),0);
full(L)
full(R)
full(P)
```

**3.** Gegeben ist das skizzierte Fachwerk mit 7 Stäben und 5 Knoten.




Die drei Lasten $F_1, F_2, F_3$ rufen in jedem Stabende eine Reaktionskraft parallel zum Stab hervor. Die Reaktionskräfte in den Lagen (IV) und (V) sind die Vektoren $(-A, 0)^\top$ respektive $(B_x, B_y)^\top$. Im statischen Gleichgewicht gelten die beiden Regeln:

*(1) Die Summe aller auf einen Knoten wirkenden Kräfte ist Null.*

*(2) Die Summe aller in einem Stab wirkenden Kräfte ist Null.*

a) Stellen Sie diese Bedingungen in vektorieller Form für das gegebene Fachwerk auf. *Hinweis:* Statt pro Stab zwei Kräfte (eine pro Stabende) einzuführen, benutzen Sie die Konvention aus b) für die Stabkräfte in welcher die Bedingung (2) und die Bedingung, dass die Kräfte parallel zur Stabrichtung wirken, bereits implizit enthalten sind.

b) Leiten Sie daraus ein lineares Gleichungssystem für $A, B_x, B_y, S_1, \dots, S_7$ her, wobei $S_1, \dots, S_7$ die Stabkräfte bezeichnen:

$S_i > 0$: $S_i < 0$:


c) Lösen Sie mit Hilfe von Matlab das Gleichungssystem für allgemeine Lasten $F_1, F_2, F_3$ und folgern Sie daraus die Lösung für

$$F_1 = 10N, F_2 = 20N, F_3 = 30N.$$

d) Lesen Sie aus der in c) gefundenen allgemeinen Lösung die $7 \times 3$-Matrix $E$ der Einflusszahlen ab, so dass

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_7 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}.$$

**Lösung**

a) Wir können entweder für jeden Stab zwei Kraftvektoren (einen pro Stabende) einführen oder wir verwenden den Hinweis. Würden wir Ersteres tun, so hätten wir 14 vektorielle Unbekannten, also 28 skalare Unbekannten. Dann müssten wir die 7 vektoriellen Gleichungen welche Bedingung (2) liefert aufstellen sowie die 14 skalaren Gleichungen welche aus der Bedingung "parallel zur Stabrichtung" resultieren (diese 28 skalaren Gleichungen sind nicht alle unabhängig). Dadurch würden sich die 28 Unbekannten wieder auf 7 skalare Unbekannten reduzieren. Kurz; es läuft auf dasselbe hinaus wie wenn wir gleich mit den skalaren $S_1, \dots, S_7$ wie in b) rechnen.

Wir verwenden also die reellen Variablen $S_1, \dots, S_7$ und die Stabkraft in einem Knoten errechnet sich durch $S_i$ multipliziert mit dem normierten Vektor $r$ der in Richtung Stabmittelpunkt zeigt. Am anderen Stabende ist der Richtungsvektor zum Mittelpunkt natürlich dann $-r$ und Bedingung (2) damit automatisch erfüllt, da sich $S_i r$ und $S_i(-r)$ zu Null addieren. Und natürlich sind diese Kräfte auch parallel zur Stabrichtung. Die normierten Richtungsvektoren lassen sich aus der Skizze ablesen (ausser für $(B_x, B_y)^\top$ welchen wir so stehen lassen) und wir erhalten

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) && F_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + S_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\
&(\mathrm{II}) && F_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + S_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + S_3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + S_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\
&(\mathrm{III}) && F_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + S_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + S_5 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + S_6 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0 \\
&(\mathrm{IV}) && A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_6 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + S_7 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\
&(\mathrm{V}) && \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} + S_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_5 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + S_7 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}
$$

b) Die Gleichungen für die horizontale ($x-$)Komponenten und die vertikale ($y-$)Komponenten, die daraus folgen, sind

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I})_x && -\frac{S_1}{\sqrt{2}} - S_2 = 0 \\
&(\mathrm{I})_y && -F_1 - \frac{S_1}{\sqrt{2}} = 0 \\
&(\mathrm{II})_x && \frac{S_1}{\sqrt{2}} - \frac{S_3}{\sqrt{2}} - S_4 = 0 \\
&(\mathrm{II})_y && -F_2 + \frac{S_1}{\sqrt{2}} + \frac{S_3}{\sqrt{2}} = 0 \\
&(\mathrm{III})_x && S_2 + \frac{S_3}{\sqrt{2}} - \frac{S_5}{\sqrt{2}} - \frac{S_6}{\sqrt{2}} = 0 \\
&(\mathrm{III})_y && -F_3 - \frac{S_3}{\sqrt{2}} - \frac{S_5}{\sqrt{2}} + \frac{S_6}{\sqrt{2}} = 0 \\
&(\mathrm{IV})_x && -A + \frac{S_6}{\sqrt{2}} = 0 \\
&(\mathrm{IV})_y && -\frac{S_6}{\sqrt{2}} - S_7 = 0 \\
&(\mathrm{V})_x && B_x + S_4 + \frac{S_5}{\sqrt{2}} = 0 \\
&(\mathrm{V})_y && B_y + \frac{S_5}{\sqrt{2}} + S_7 = 0
\end{aligned}
$$

In Matrix-Schreibweise erhält man

| $A$ | $B_x$ | $B_y$ | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ | $S_6$ | $S_7$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ | $-1/\sqrt{2}$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | $-1/\sqrt{2}$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $F_1$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | $1/\sqrt{2}$ | $0$ | $-1/\sqrt{2}$ | $-1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | $1/\sqrt{2}$ | $0$ | $1/\sqrt{2}$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $F_2$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $1/\sqrt{2}$ | $0$ | $-1/\sqrt{2}$ | $-1/\sqrt{2}$ | $0$ | $0$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-1/\sqrt{2}$ | $0$ | $-1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ | $0$ | $F_3$ |
| $-1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1/\sqrt{2}$ | $0$ | $0$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $-1/\sqrt{2}$ | $-1$ | $0$ |
| $0$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1$ | $1/\sqrt{2}$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $0$ | $0$ | $1$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $1/\sqrt{2}$ | $0$ | $1$ | $0$ |

c) Sei $M$ die Matrix, die der linken Seite des obigen Gleichungssystems entspricht und $p$ der Vektor der Koeffizientenspalte. Das Gleichungssystem $Mx = p$ ist genau dann für beliebiges $p$ lösbar, wenn $M$ invertierbar ist, und in diesem Fall lautet die Lösung $x = M^{-1}p$. Wir verwenden MATLAB, um die Inverse von $M$ mit dem Befehl inv(M) zu berechnen. Falls wir statt der (fehlerbehafteten) numerischen Inverse von $M$ die exakte berechnen wollen, so müssen wir MATLAB mitteilen, dass $M$ eine symbolische Matrix sein soll. Dazu schreibt man `M = sym([0 0 0 -1/sqrt(2) ...])` statt `M = [0 0 0 -1/sqrt(2) ...]` (es muss dazu die Symbolic Math Toolbox installiert sein). Danach kann man ebenfalls mit inv(M) die inverse berechnen:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{2} & 0 & 2/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 3/\sqrt{2} & 0 & 2/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -3/2 & 0 & -1 & 1/2 & -1/2 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = M^{-1}p = \begin{pmatrix} 3/2F_1 + F_2 + 1/2F_3 \\ 3/2F_1 + F_2 + 1/2F_3 \\ F_1 + F_2 + F_3 \\ -\sqrt{2}F_1 \\ F_1 \\ \sqrt{2}F_1 + \sqrt{2}F_2 \\ -2F_1 - F_2 \\ 1/\sqrt{2}F_1 - 1/\sqrt{2}F_3 \\ 3/\sqrt{2}F_1 + \sqrt{2}F_2 + 1/\sqrt{2}F_3 \\ -3/2F_1 - F_2 - 1/2F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B_x \\ B_y \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix}.$$

Für $F_1 = 10N, F_2 = 20N, F_3 = 30N$ folgt daraus

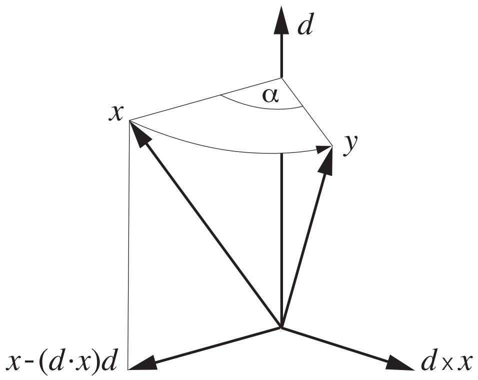
$$x \approx \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 60 \\ -14.14 \\ 10 \\ 42.43 \\ -40 \\ -14.14 \\ 70.71 \\ -50 \end{pmatrix}.$$

d) Aus der allgemeinen Lösung liest man ab, dass

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} & \sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -3/2 & -1 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}$$

gilt.

**4.** Sei $d$ ein Einheitsvektor in $\mathbb{R}^3$. Durch Drehung um den Winkel $\alpha$ um die Achse $d$ wird ein Vektor $x$ in den Vektor $y$ überführt.




a) Verifizieren Sie die Formel

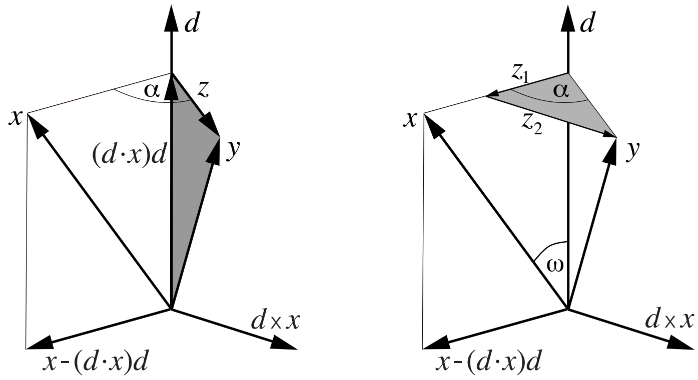
$$y = \cos(\alpha)x + (1 - \cos(\alpha))(d \cdot x)d + \sin(\alpha)(d \times x).$$

b) Beschreiben Sie dieselbe Drehung durch die Formel $y = Dx$ für eine geeignete $3 \times 3$-Matrix $D$.

c) Verifizieren Sie, dass $D$ orthogonal ist.

**Lösung**

a) Man betrachte die folgende Skizze:




Da $d$ ein Einheitsvektor ist, entspricht $(d \cdot x)d$ der Orthogonalprojektion von $x$ auf $d$. Dann lässt sich $y$ in der Form $y = (d \cdot x)d + z$ schreiben, wobei $z$ ein auf $d$ senkrechter Vektor ist. Sei $z_1$ die Komponente von $z$ in Richtung $x - (d \cdot x)d$ und $z_2$ die Komponente von $z$ in Richtung $d \times x$. Dabei ist klar, dass $x - (d \cdot x)d$ und $d \times x$ senkrecht aufeinanderstehen, da $d \times x$ bekanntlich senkrecht auf $d$ und $x$ steht. Somit spannen $z_1$ und $z_2$ einen rechten Winkel auf. Daraus folgt offenbar

$$z_1 = \cos(\alpha)|z|\frac{x - (d \cdot x)d}{|x - (d \cdot x)d|}, \; z_2 = \sin(\alpha)|z|\frac{d \times x}{|d \times x|},$$

da diese Vektoren genau die richtige Richtung und Länge haben. Weiter entnehmen wir der Skizze, dass bei der Überführung von $x$ in $y$ ebenso $x-(d\cdot x)d$ auf $z$ abgebildet wird, womit diese beiden Vektoren dieselbe Länge haben. Wir erhalten also $|x-(d\cdot x)d| = |z|$, woraus sofort $z_1 = \cos(\alpha)(x - (d \cdot x)d)$ folgt. Verwenden wir nun noch den Hinweis, so ergibt sich ebenso $z_2 = \sin(\alpha)(d \times x)$. Zusammen gilt also

$$y = \cos(\alpha)x + (1 - \cos(\alpha))(d \cdot x)d + \sin(\alpha)(d \times x).$$

Damit müssen wir uns nur noch überlegen, weshalb $|d \times x| = |x - (d \cdot x)d|$ gilt. Dazu rechnen wir einfach beide Ausdrücke aus und erhalten einerseits $|x-(d\cdot x)d| = |x|\sin(\omega)$ und andererseits $|d \times x| = |x||d|\sin(\omega) = |x|\sin(\omega)$, womit alles gezeigt ist.

b) Seien

$$D_1 = \begin{pmatrix} d_1^2 & d_1d_2 & d_1d_3 \\ d_1d_2 & d_2^2 & d_2d_3 \\ d_1d_3 & d_2d_3 & d_3^2 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & -d_3 & d_2 \\ d_3 & 0 & -d_1 \\ -d_2 & d_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man zeigt unter Verwendung von (a), dass

$$D = \cos(\alpha)I_3 + (1 - \cos(\alpha))D_1 + \sin(\alpha)D_2$$

die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

c) Es gilt $D_1^T = D_1$ und $D_2^T = -D_2$. Unter Verwendung von $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ findet man $D_1^2 = D_1$ und $D_2^2 = D_1 - I_3$. Weiter gilt auch, dass $D_1 D_2 = D_2 D_1$, die beiden Matrizen also kommutieren. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
D^T D &= (\cos(\alpha) I_3 + (1 - \cos(\alpha)) D_1 - \sin(\alpha) D_2)(\cos(\alpha) I_3 + (1 - \cos(\alpha)) D_1 + \sin(\alpha) D_2) \\
&= (\cos(\alpha) I_3 + (1 - \cos(\alpha)) D_1)^2 - \sin(\alpha)^2 D_2^2 \\
&= \cos(\alpha)_3^2 + 2(1 - \cos(\alpha)) \cos(\alpha) D_1 + (1 - \cos(\alpha))^2 D_1 - \sin(\alpha)^2 (D_1 - I_3) \\
&= (\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2) I_3 + (2(1 - \cos(\alpha)) \cos(\alpha) + (1 - \cos(\alpha))^2 - \sin(\alpha)^2) D_1 \\
&= I_3 + 0 \cdot D_1 \\
&= I_3.
\end{aligned}$$