Prof. Norbert Hungerbühler — ETH Zürich - D-MAVT
Lineare Algebra I — HS 2015

Serie 8: Fakultativer Online-Test

1. Diese Serie besteht nur aus Multiple-Choice-Aufgaben und wird nicht vorbesprochen. Die Nachbesprechung findet am 27. November 2015 in der Übungsstunde statt. Bei einigen Aufgaben sind mehrere Antworten richtig. Viel Erfolg!

Bestimmen Sie das Produkt $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

i) ✗ $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ii) ✓ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

iii) ✗ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Lösung

2. Berechnen Sie

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{2}{15} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

i) ✗ $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{7}{10} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$

ii) ✗ $\begin{pmatrix} 4 & -10 \\ \frac{7}{9} & 0 \end{pmatrix}$

iii) ✗ $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -\frac{46}{15} & -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$

iv) ✗ $\begin{pmatrix} 0 & -16 \\ \frac{8}{9} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

v) ✓ Keine der genannten Möglichkeiten.

Lösung

3. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) ✗ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ii) ✓ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

iii) ✗ Die Matrix ist nicht invertierbar.

Lösung Mit Hilfe der Formel

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

folgt sofort die richtige Antwort.

4. Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Aus dieser möchten wir die erste Spalte extrahieren. Das heisst, das Produkt von rechts oder links mit einer weiteren Matrix ist die erste Spalte von A. Für welche der folgenden Möglichkeiten ist dies gegeben?

i) ✗ Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) ✗ Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

iii) ✗ Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

iv) ✗ Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

v) ✓ Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Lösung

Falsch, diese Multiplikation ist nicht definiert.

Falsch, dies ergibt eine $3 \times 2-$Matrix, die aus der Matrix A durch ersetzen der zweiten Spalte mit Nullen entsteht.

Falsch, dies ergibt die zweite Zeile von A.

Falsch, diese Multiplikation ist nicht definiert.

Richtig.

5. Sei A eine 4×4-Matrix. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

i) $Ax = b$ hat für jedes b höchstens eine Lösung.

ii) $Ax = b$ hat für jedes b mindestens eine Lösung.

i) ✓ Richtig.

ii) ✗ Falsch.

Lösung Siehe K. Nipp/D. Stoffer, Lineare Algebra (5. Auflage), Satz 2.8 und benutze folgende Äquivalenz: (i) $Ax = b$ hat für jedes b höchstens eine Lösung $\Longleftrightarrow$ (iii) Das Gleichungssystem $Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.
Denn (i) mit $b = 0$ impliziert (iii) und die Negation von (i) – also ein b mit zwei Lösungen $x_1 \neq x_2$ – führt zu einer nicht-trivialen Lösung $A\underbrace{(x_1 - x_2)}_{=:x\neq 0} = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0$ des homogenen Gleichungssystems.

6. Für die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und den reellen Vektor $b = (1, 2, 0)^\top$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b \ldots$

i) ✗ eine eindeutige Lösung.
ii) ✓ keine Lösung.
iii) ✗ eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.
iv) ✗ eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

Lösung Damit das Gleichungssystem lösbar ist, muss sich b als Linearkombination der Spalten ausdrücken lassen. Da die dritte Spalte nur das zweifache der ersten ist, können wir diese ignorieren und versuchen b als Linearkombination der ersten beiden Spalten zu schreiben. Dies ist aber nicht möglich, da die dritte Komponente von b Null ist und daher der erste Spaltenvektor in der Linearkombination nicht vorkommen darf - und somit b also ein Vielfaches der zweiten Spalte sein müsste.
Alternativ kann man Gauss verwenden, um das System mit rechter Seite b in Zeilenstufenform zu bringen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{array}\right)$$

Damit sieht man sofort, dass es keine Lösung geben kann, da $-3/2 \neq 0$.

7. Sei A eine 2×3-Matrix. Dann existiert eine 3×2-Matrix B, welche nicht die Nullmatrix ist, aber trotzdem gilt $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

i) ✓ Richtig.
ii) ✗ Falsch.

Lösung Für eine 2×3-Matrix gibt es im Gaussendschema immer mindestens eine Nicht-Pivotspalte. Damit lassen sich nichttriviale Lösungen mit einem freien Parametern für das homogene System finden. Sei also $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ eine solche nichttriviale Lösung und definiere $B = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & 0 \\ x_3 & 0 \end{pmatrix}$ ($\neq$ Nullmatrix). Dann ist $AB = \begin{pmatrix} Ax & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$ die 2×2-Nullmatrix.

8. Für die reelle Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat das lineare Gleichungssystem $Ax = 0 \ldots$

i) ✗ keine Lösung.

ii) ✗ eine eindeutige Lösung.

iii) ✓ eine Lösungsmenge mit einem freien Parameter.

iv) ✗ eine Lösungsmenge mit zwei freien Parametern.

Lösung Wir lesen den Rang der Matrix ab, indem wir erkennen, dass die erste und dritte Spalte linear abhängig sind. Somit ist Rang $A = 2$. Da A eine 3×3-Matrix ist, muss das homogene Gleichungssystem Lösungen mit $3 - 2 = 1$ freien Parameter besitzen. Falls wir den Rang nicht direkt ablesen können, kann man auch Gauss anwenden um die Matrix in Zeilenstufenform zu bringen (siehe Aufgabe 6).

9. Für die reelle Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & -12 & a^2 - 7 \\ 0 & -1 & 7a + 5 & 5 \end{pmatrix}$$

gilt:

i) ✗ Für $a = 1$ ist B nicht invertierbar.

ii) ✓ $\operatorname{Rang} B \geq 3 \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

iii) ✓ Für $a = 0$ ist $\det B = 0$.

Lösung Wir bringen die Matrix mit Gauss in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & -12 & a^2 - 7 \\ 0 & -1 & 7a + 5 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & -10 & a^2 - 9 \\ 0 & -1 & 7a + 5 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + 1 \\ 0 & 0 & 7a & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 7a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + 1 \end{pmatrix}$$

Damit lesen wir die richtigen Aussagen anhand der entstehenden Nullzeilen von B ab.

10. Der Rang von

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

beträgt...

i) ✗ 0.
ii) ✗ 1.
iii) ✓ 2.
iv) ✗ 3.
v) ✗ 4.

Lösung Der Rang ist die Anzahl linear unabhängiger Spalten oder Zeilen von A. Die ersten zwei Zeilen von A sind linear unabhängig, die dritte Zeile ergibt sich als Summe der ersten beiden, also ist Rang $A = 2$.

11. Seien A, B zwei symmetrische Matrizen. Dann ist das Produkt AB auch symmetrisch.

i) ✗ Richtig.
ii) ✓ Falsch.

Lösung Im Allgemeinen ist die Aussagen falsch – die Matrizen müssten kommutieren (d.h. $AB = BA$) damit das Produkt wieder symmetrisch ist. Am einfachsten zeigt dies ein Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind beide symmetrisch aber das Produkt $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ist es nicht.

12. Gegeben sei eine orthogonale Matrix A mit Inverser A^{-1}. Dann gilt:

i) ✓ $A^{-1} = A^T$
ii) ✗ $A^{-1} = 2A$
iii) ✗ $A^{-1} = -A$
iv) ✗ Die Inverse existiert nicht.
v) ✗ Keine der genannten Möglichkeiten.

Lösung

Richtig, Orthogonalität ist genau über diese Eigenschaft definiert ($A^T A = I$ ist nur eine andere Form dies niederzuschreiben).

Dies ist nie möglich für eine orthogonale Matrix.

Für gewisse orthogonale Matrizen kann dies richtig sein, im Allgemeinen ist es jedoch falsch.

13. Gegeben seien:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

i) ✓ A_1 ist nicht orthogonal.

ii) ✗ A_2 ist nicht orthogonal aber die inverse A_2^{-1} ist es.

Lösung

Richtig, die Spalten sind zwar normiert, aber das Skalarpodukt beider Spalten ist 1 – sie stehen also nicht orthogonal zueinander. Auch ist A_1 noch nicht einmal invertierbar, aber jede orthogonale Matrix ist invertierbar.

Falsch. Es ist zwar richtig, dass A_2 nicht orthogonal ist (die zweite Spalte ist nicht normiert), aber dann ist automatisch auch die Inverse nicht orthogonal. Eine Matrix A ist orthogonal genau dann wenn die Inverse es ist.

14. Gegeben seien:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

i) ✗ A_2 ist orthogonal.

ii) ✗ A_1 ist orthogonal.

iii) ✓ Keine der genannten Möglichkeiten.

Lösung

Feedback for 1): Falsch, die Spalten sind nicht orthogonal zueinander (aber sie sind normiert).

Feedback for 2): Falsch, die zweite Spalte ist nicht normiert, aber die Spalten stehen orthogonal zueinander.

15. Sei A eine $m \times n$-Matrix mit $m > n$, so dass $A^\top A$ die Einheitsmatrix $\mathbf{I}_n$ ist. Dann gilt:

i) ✗ A ist orthogonal und $\|A\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ für alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

ii) ✓ A ist nicht orthogonal, aber trotzdem gilt $\|A\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

iii) ✗ Sei B eine $n \times m$-Matrix, so dass BA orthogonal ist. Dann ist auch AB orthogonal.

Lösung

Falsch, denn A ist keine quadratische Matrix (insbesondere nicht invertierbar) und somit nicht orthogonal.

Richtig, denn $\|A\,\mathbf{x}\| = \sqrt{(A\mathbf{x})^T A\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T A^T A\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|$.

Falsch, das gilt nie. Ein Gegenbeispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dann gilt $A^\top A = \mathbf{I}_2$ und mit $B = A^\top$ ist also BA orthogonal, aber $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht orthogonal (noch nicht einmal invertierbar). Oder noch einfacher: $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann $A^\top A = \mathbf{I}_1$ (die 1×1-Einheitsmatrix welche natürlich orthogonal ist) und mit $B = A^\top$ ist BA orthogonal, aber $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht orthogonal.

16. Gegeben sei die $n \times n-$Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 1 & * & \\ \vdots & \vdots & & \\ n & 1 & & \end{pmatrix},$$

wobei nur die ersten beiden Spalten bekannt sind. Angenommen es existiert eine LR-Zerlegung $LR = A$, was können Sie darüber aussagen?

i) ✗ Die erste Spalte von L ist $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & \cdots & -n \end{pmatrix}^T$.

ii) ✗ Die erste Spalte von L ist $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & \cdots & -n \end{pmatrix}^T$.

iii) ✓ Die erste Spalte von L ist gleich der ersten Spalte von A.

iv) ✗ Man muss die gesamte Matrix A kennen um die erste Spalte von L zu bestimmen.

v) ✗ Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 0.

vi) ✗ Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 1.

vii) ✗ Der Eintrag r_{22} der Matrix R ist 3.

viii) ✗ Man muss die gesamte Matrix A kennen um den Eintrag r_{22} der Matrix R zu bestimmen.

Lösung

Der erste Schritt der LR-Zerlegung ist

$$\begin{array}{c|ccc|} \hline & 1 & 1 & \\ 2 & 2 & 1 & \\ 3 & 3 & 1 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ n & n & 1 & \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{c|ccc|} \hline & 1 & 1 & \\ & 0 & -1 & \\ * & 0 & -2 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ * & 0 & 1-n & \\ \hline \end{array} \to \cdots,$$

woraus man die erste Spalte von L und $r_{22} = -1$ ablesen kann.

Richtig, die erste Spalte von L ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}^T$, da $a_{11} = 1$ gilt.