Lösung: Serie 10

1.a) ☑ richtig

☐ falsch

Richtig, die erste Zeile ist das (-1)-fache der zweiten. Addiert man die erste zur zweiten Zeile (eine Operation die die Determinante unverändert lässt) so erhält man eine Matrix mit einer Nullzeile und somit $\det(A) = 0$.

b) ☐ richtig

☑ falsch

Falsch, für eine 3×3-Matrix gilt $\text{Rang}A = 3 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. Alternativ kann man auch argumentieren, dass beim Gauss'schen Eliminationsverfahren gleich im ersten Schritt eine Nullzeile entsteht und daher der Rang nicht maximal sein kann.

c) ☑ richtig

☐ falsch

Richtig, alle Vielfachen von $\mathbf{x} = (3, -2, 1)^T$ sind Nulllösungen. Alternativ kann man benutzen, dass $\det(A) = 0$ äquivalent zu dieser Aussage ist.

d) ☐ richtig

☑ falsch

Falsch, dies wäre gleichbedeutend mit $\det(A) \neq 0$ ($\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ist für beliebige $\mathbf{b}$ eindeutig lösbar). Da $\det(A) = 0$ hat das Gleichungssystem entweder keine oder unendlich viele Lösungen aber nie genau eine (für das gegebene $\mathbf{b}$ existieren unendlich viele Lösungen).

e) ☑ richtig

☐ falsch

Richtig. Da die Matrix Rang 2 hat bildet die Menge der Vektoren $\mathbf{v}$ für die eine (und dann gleich unendlich viele) Lösung existert eine Ebene im R^3. Für alle $\mathbf{v}$ die nicht in dieser Ebene liegen (zumindest optisch sind das die meisten) existiert keine Lösung.

f) ☐ richtig

☑ falsch

Diese Aussage ist äquivalent zum zweiten und zum drittletzten Punkt und somit falsch.

2. Prüfungsaufgabe, Frühling '07

a) Wir betrachten im Folgenden

$$A^T = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix}$$

anstatt von A, da $\det A = \det A^T$ und $\det A^T$ einfacher zu berechnen ist.
<u>Erste Variante</u>: Aus K. Nipp/D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage 2002, Lemma 3.7 wissen wir, dass für quadratische Matrizen der Gestalt

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

gilt: $\det M = \det A \cdot \det C$. Dies kann man natürlich rekursiv anwenden. Zerlege

$$A^T = \begin{pmatrix} a & B \\ 0 & C \end{pmatrix}, \text{ wobei } C = \begin{pmatrix} D & E \\ 0 & F \end{pmatrix}, \text{ mit}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & b & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \det A = \det A^T &= a \cdot \det C = a \cdot \det D \cdot \det F \\ &= a \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & b \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{vmatrix} \\ &= a(-1)(-6+b)(-2-c) = a(b-6)(c+2) = abc + 2ab - 6ac - 12a. \end{aligned}$$

<u>Zweite Variante (mit Gauss)</u>:

$$\det A = \det A^T = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+c \end{vmatrix}$$

wie erwartet.

b) A ist singulär, wenn $\det A = 0$, also wenn $a = 0$, $b = 6$ oder $c = -2$.

3. Cramersche Regel, 1750

Wenn wir die i-te Spalte von A mit $a^{(i)}$ bezeichnen, können wir die Gleichung $b = Ax$ als $b = \sum_{i=1}^n x_i a^{(i)}$ umschreiben. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\det A_k &= \det(a^{(1)} \ldots a^{(k-1)}\ b\ a^{(k+1)} \ldots a^{(n)}) \\
&= \det(a^{(1)} \ldots a^{(k-1)} \sum_{i=1}^n x_i a^{(i)}\ a^{(k+1)} \ldots a^{(n)}) \\
&= \sum_{i=1}^n x_i \det(a^{(1)} \ldots a^{(k-1)}\ a^{(i)}\ a^{(k+1)} \ldots a^{(n)}) \\
&= x_k \cdot \det A,
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit aus der Gleichung

$$\det(a^{(1)} \ldots a^{(k-1)}\ a^{(i)}\ a^{(k+1)} \ldots a^{(n)}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \neq k \text{ (zwei gleiche Spalten);} \\ \det A, & \text{falls } i = k \end{cases}$$

folgt.

4. a) Nach Definition gilt

$$d_j = \sum_{i=1}^n (A^G)_{ij}.$$

Folglich ist die Summe der Zeilen von L^G gleich 0, d.h. $(1, 1, \ldots, 1)^T$ ist eine nichttriviale Lösung von $L^G x = 0$. Daraus folgt, dass L^G singulär ist.

b) In diesem Fall gilt

$$L^G = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nach Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem reicht es, irgendeinen Kofaktor auszurechen. Um mit einer Untermatrix mit möglichst vielen Nulleinträgen zu arbeiten, wählen wir den $(3, 3)$-Kofaktor $\tilde{a}_{33}$ aus. Es gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{33} &= (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 11 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 40.
\end{aligned}$$

Folglich hat G genau 40 aufspannende Bäume.