

Lösung: Serie 13: Selbsteinschätzungstest

1. $x_1 = 1, x_2 = 1.$

$x_1 = -1, x_2 = 1.$

$x_1 = 1, x_2 = -1.$

$x_1 = -1, x_2 = -1.$

Das Produkt $A \cdot B = C = (c_{ij})$ muss gleich der Einheitsmatrix E_3 sein. Unter anderem muss also $c_{11} = 1$ sein. Dieser Eintrag ist das Produkt der ersten Zeile von A mit der ersten Spalte von B . Daraus folgt $x_1 = 1$. Genauso folgern wir, dass $c_{33} = 1$. Das Produkt der dritten Zeile von A mit der dritten Spalte von B liefert dann $x_2 = -1$. Für die Probe multipliziert man die beiden Matrizen und erhält als Produkt $A \cdot B = E_3$.

2. Richtig.

Falsch.

Wenn $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist, dann ist $x_1 a^{(1)} + \dots + x_n a^{(n)} = b$. Um b als solche Linearkombination der Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ darzustellen, muss aber $b \in \text{span} \{a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\}$ gelten.

3. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Über die lineare Unabhängigkeit von drei Vektoren der Länge drei entscheidet die Determinante der 3×3 -Matrix, deren Spaltenvektoren die gegebenen Vektoren sind. Verschwindet diese nicht, sind die Vektoren linear unabhängig. Es ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 6.$$

Da es sich bei den weiteren Antwortalternativen nur um Vertauschungen der ersten drei handelt, ändert sich die Determinante nur bis auf ein Vorzeichen, verschwindet also nicht. Damit sind alle jeweils linear unabhängig.

4. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

Mit dem Gaussverfahren erhält man aus der Matrix A eine Zeilenstufenform wie die folgende:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher sind die Lösungen des Gleichungssystems $Ax = 0$ durch

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_3 - 2x_4 \\ x_1 &= \frac{1}{2}((x_3 + 2x_4) + x_3 - 2x_4) = x_3 \end{aligned}$$

gegeben, wobei x_3 und x_4 freie Parameter sind. Der Kern von A hat somit die Dimension 2.

Die Vektoren $(1, -1, 1, 0)^\top$, $(1, -3, 1, 1)^\top$ sind Lösungen von $Ax = 0$ und linear unabhängig, da der zweite kein Vielfaches vom ersten ist. Sie bilden daher eine Basis vom Kern von A .

Die zweite Antwort ist falsch, weil jede Basis vom Kern von A genau zwei Elemente hat.

Die dritte Antwort ist falsch, weil Vektoren im R^3 nicht im Kern von A liegen können, sondern nur Vektoren im R^4 .

Die vierte Antwort ist falsch, weil $(1, 0, -1, 0)^\top$ keine Lösung von $Ax = 0$ ist.

5. Die Dimension des Unterraums \mathcal{P}_n ist $n + 1$.
- Die Sinusfunktion ist Element von \mathcal{F} ($\sin \in \mathcal{F}$), aber liegt in keinem der Unterräume \mathcal{P}_n ($\sin \notin \mathcal{P}_n$).
- Sinus und Cosinus sind linear abhängige Vektoren in \mathcal{F} .
- $1, \sin^2, \cos^2$ sind linear abhängige Vektoren in \mathcal{F} .
- Sind zwei Polynome $p(x), q(x)$ linear unabhängig, so auch die Polynome $xp(x), xq(x)$.
- Der Untervektorraum $V = \text{span}\{\sin\}$ schneidet den Unterraum \mathcal{P}_3 nur in 0 (formal $V \cap \mathcal{P}_3 = \{0\}$) und es gilt $\dim(\text{span}\{\sin, 1, x, x^2, x^3\}) = 5$.

☑ Die Abbildung $A: \mathcal{F} \rightarrow R, f \mapsto f(1)$ ist linear.

Die Dimension ist höchstens $n + 1$, denn die Polynome $1, x, x^2, \dots, x^n$ erzeugen offensichtlich diesen Unterraum. Diese $n + 1$ Polynome sind aber auch linear unabhängig, wie wir gleich zeigen, und damit ist die Dimension auch mindestens $n + 1$; zusammen ergibt dies $\dim(\mathcal{P}_n) = n + 1$. Nach Definition von linear unabhängig, ist zu zeigen: $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0 \forall x$ impliziert $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$. Für $x \rightarrow \infty$ konvergiert $(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)/x^n$ gegen a_n und nach Voraussetzung auch gegen Null; also $a_n = 0$. Induktiv folgt, dass alle Koeffizienten verschwinden.

Richtig. $\sin \in \mathcal{F}$ ist klar, denn Sinus ist eine Funktion von R nach R . Allerdings ist Sinus nicht als Polynom schreibbar (kein Polynom hat unendlich viele Nullstellen ausser dem Nullpolynom), also $\sin \notin \mathcal{P}_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Falsch, denn aus $\lambda \sin + \mu \cos \equiv 0$ folgt durch auswerten bei Null $\lambda \sin(0) + \mu \cos(0) = \mu = 0$ und durch auswerten bei $\pi/2$ genauso $\lambda = 0$. Damit haben wir aber gerade gezeigt, dass die beiden Vektoren linear unabhängig sind.

Genau, denn $\sin^2 + \cos^2 \equiv 1$ bedeutet, dass sich 1 als Linearkombination von \sin^2 und \cos^2 schreiben lässt.

$\lambda xp(x) + \mu xq(x) = 0 \forall x \in R$ impliziert (man dividiere durch x) $\lambda p(x) + \mu q(x) = 0 \forall x \neq 0$. Also hat das Polynom $\lambda p + \mu q$ unendlich viele Nullstellen und muss damit das Nullpolynom sein: $\lambda p + \mu q \equiv 0$. Nach Voraussetzung hat diese Gleichung nur die triviale Lösung $\lambda = \mu = 0$ und wir haben gezeigt: $xp(x), xq(x)$ sind linear unabhängig.

Ein Element von V ist von der Form $\lambda \sin$ für ein $\lambda \in R$. Wie in (b) folgert man, dass sich diese Funktion nur für $\lambda = 0$ als Polynom schreiben lässt. Damit haben V und \mathcal{P}_3 nur den Nullvektor gemeinsam. Die zweite Aussage ist ebenfalls richtig, denn $\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 x + \lambda_4 x^2 + \lambda_5 x^3 = 0 \forall x$ impliziert $\lambda_1 = 0$ (folgt aus dem ersten Teil der Aufgabe) und $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0$ folgt dann wie in (a). Damit haben wir 5 linear unabhängige Vektoren die also einen 5-dimensionalen Raum aufspannen.

Richtig: $\mathcal{F}(\alpha f + g) = [\alpha f + g](1) = \alpha f(1) + g(1) = \alpha \mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g)$.

6. ☑ A ist orthogonal.

☐ A ist nicht orthogonal.

Offensichtlich sind alle Spalten normiert. Die Spalten stehen auch orthogonal zueinander, denn das Skalarprodukt zweier Spalten ist Null, da sich die Einsen an verschiedenen Stellen befinden (das Produkt zweier Komponenten zweier verschiedener Spalten ist immer Null). Also ist A orthogonal.

7. ☑ Das lineare Gleichungssystem $A \mathbf{x} = \mathbf{u}$ hat die Lösung $\mathbf{x} = \frac{1}{2} \mathbf{v}$.

☑ Die Determinante von A ist entweder $-\sqrt{2^n}$ oder $\sqrt{2^n}$. Andere Werte sind nicht möglich.

COMPILATION ERROR - see the logs

Feedback for 1): Richtig, aus $A \mathbf{u} = \mathbf{v}$ folgt $A^2 \mathbf{u} = A \mathbf{v}$ und mit $A^2 \mathbf{u} = 2 \mathbf{u}$ folgt $2 \mathbf{u} = A \mathbf{v}$ oder $\mathbf{u} = A(\frac{1}{2} \mathbf{v})$.

Feedback for 2): Richtig, aus $A^2 = 2I_n$ folgt $(\det A)^2 = \det(A^2) = \det(2I_n) = 2^n$. Also erfüllt $\det A$ die quadratische Gleichung $x^2 = 2^n$.

8. 0.

-1.

2.

Entwicklung nach der ersten Spalte liefert $\det(A) = -1(2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = -1$.

9. Es gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

Es gilt $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Aus $\det(A) \neq 0$ folgt, dass die Spaltenvektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ von A linear unabhängig sind.

Es gilt $\det(AB) = \det(BA)$.

Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.

Es gilt $\det(A) = \det(A^T)$, wobei A^T die Transponierte von A bezeichnet.

Für jede von Null verschiedene reelle Zahl λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

* K. Nipp / D. Stoffer, Lineare Algebra, vdf Hochschulverlag, 5. Auflage 2002

Gegenbeispiel: $A = B = I_n$. Dann ist $\det(A + B) = \det(2I_n) = 2^n \neq \det(A) + \det(B) = \det(I_n) + \det(I_n) = 2$

Siehe Buch*, Satz 3.6, p.58.

Siehe Buch, Korollar 3.12 auf p.63. Punkt *i*) ist äquivalent dazu, dass die Spaltenvektoren der $n \times n$ -Matrix A linear unabhängig sind.

Beweis: mit Hilfe von Satz 3.6 im Buch auf p.58 haben wir: $\det(AB) = \det(A) \det(B) = \det(B) \det(A) = \det(BA)$.

Nein, denn jedes Element in der Matrix A wird mit λ multipliziert. Siehe auch den letzten Punkt.

Siehe Buch, Satz 3.3 auf p.56.

Jedes Element in A wird mit λ multipliziert. Dabei kann man aus jeder Zeile von A einen Faktor λ aus der Determinante herausziehen. Da wir n Zeilen haben, folgt die Aussage.