Prof. Norbert Hungerbühler | ETH Zürich - D-MAVT
Lineare Algebra I | HS 2015

Serie 11

1. Betrachten Sie die Menge $\mathbb{R}_+^2 := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ der Paare positiver, reeller Zahlen.

Die Addition auf $\mathbb{R}_+^2$ sei folgendermassen definiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \end{pmatrix}$$

Im Folgenden betrachten wir drei verschiedene Definitionen der Multiplikation mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. Definition.: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}$

2. Definition.: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} e^\lambda x_1 \\ e^\lambda x_2 \end{pmatrix}$

3. Definition.: $\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1^\lambda \\ x_2^\lambda \end{pmatrix}$

Welche der folgenden Behauptungen sind korrekt?

$\mathbb{R}_+^2$ ist ein Vektorraum mit der oben definierten Addition und Multiplikation mit einem Skalar gemäss der…

a) 1. Definition.
- ☐ richtig
- ☐ falsch

b) 2. Definition.
- ☐ richtig
- ☐ falsch

c) 3. Definition.
- ☐ richtig
- ☐ falsch

2. Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ Spaltenvektoren. Das *Spatprodukt* dieser drei Vektoren ist dann definiert als

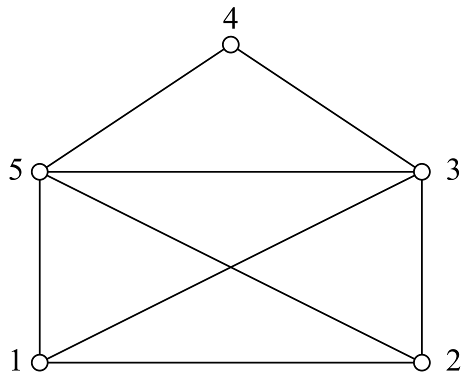
$$S(a, b, c) := (a \times b) \cdot c.$$

1. Beweisen Sie, dass $S(a, b, c) = \det(a, b, c)$ gilt.

2. Beweisen Sie, dass $|S(a, b, c)|$ das Volumen des von a, b und c aufgespannten Parallelepipeds (Spat) ist.

3. Was sagt das Vorzeichen von $S(a, b, c)$ aus?

3. Wir interpretieren den Graphen G



aus Serie 10, Aufgabe 4 als elektrisches Netzwerk, wobei jede Kante einem Widerstand von 1 Ohm entspricht.

Berechnen Sie den Widerstand R zwischen den Knoten 1 und 5 mit Hilfe der Formel $R = \frac{\tau_{15}}{\tau}$, wobei τ die Anzahl der aufspannenden Bäume von G ist und τ_{15} die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 enthalten. Verwenden Sie dazu die Formel aus Serie 10, Aufgabe 4.

Hinweis: Die Anzahl der aufspannenden Teilbäume, welche die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 *nicht* enthalten, ist gleich der Anzahl der aufspannenden Teilbäume des Graphen, den man erhält, wenn man die Kante zwischen den Knoten 1 und 5 löscht.

4. 1. Für die Vandermonde-Determinante gilt die Formel

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Verifizieren Sie diese Formel für $n = 3$.

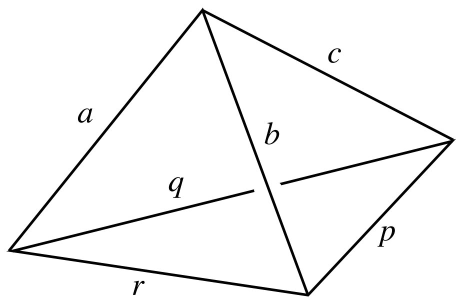
2. Für die Fläche eines ebenen Dreiecks mit den Seiten a, b, c gilt bekanntlich die Flächenformel von Heron:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Man kann zeigen, dass die Formel

$$F^2 = -\frac{1}{16} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & 1 \\ a^2 & 0 & c^2 & 1 \\ b^2 & c^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

denselben Wert für F ergibt. Für das Volumen V eines Tetraeders mit den Kantenlängen a, b, c, p, q, r



gilt eine ähnliche Formel, nämlich

$$V^2 = \frac{1}{2^5 3^2} \det \begin{pmatrix} 0 & a^2 & b^2 & c^2 & 1 \\ a^2 & 0 & r^2 & q^2 & 1 \\ b^2 & r^2 & 0 & p^2 & 1 \\ c^2 & q^2 & p^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welchen Inhalt hat der Tetraeder mit den Kantenlängen $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $p = 4$, $q = 3$ und $r = 2$?