ETHZ, D-MAVT
Basisprüfung Lineare Algebra
Frühling 2007
Prof. K.Nipp

Wichtige Hinweise

- Zweistündige Prüfung.
- Erlaubte Hilfsmittel: 20 A4-Seiten (von Hand oder mit dem Computer geschrieben). Taschenrechner sind NICHT erlaubt.
- Alle Aufgaben werden gleich gewichtet!
- Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen. Nichtmotivierte Lösungen werden nicht akzeptiert!

—- • —-

1. Bestimmen Sie jeweils mit dem Gaussverfahren, ob die Vektoren in $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ linear abhängig oder linear unabhängig sind und ob sie erzeugend sind. Welche bilden eine Basis?

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Gegeben sind 8 Punkte in $\mathbb{R}^5$, $P_i = (u_i, v_i, w_i, x_i, y_i),\ i = 1, 2, \ldots, 8$, wobei

u_i	1	1	1	1	1	1	0	0
v_i	1	1	1	−1	0	0	1	1
w_i	−1	1	0	0	1	−1	1	1
x_i	0	0	−1	1	−1	1	1	1
y_i	3	5	3	1	4	2	5	5

Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c, d der Funktion $y = f(u, v, w, x) = a\,u + b\,v + c\,w + d\,x$, so dass die Summe der Fehlerquadrate in y–Richtung

$$\sum_{i=1}^{8} [f(u_i, v_i, w_i, x_i) - y_i]^2$$

minimal wird.

Bitte wenden!

3. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\det A$.

b) Für welche Werte der Parameter a, b, c, d ist die Matrix A singulär?

4. Sei $x \in \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die folgende Abbildung $\mathcal{F}$ von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{F}: \, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \longmapsto \quad x' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3}x_1 - x_2 \\ x_1 - \sqrt{3}x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Interpretieren Sie diese Abbildung geometrisch.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

c) Durch welche Matrix A wird $\mathcal{F}$ beschrieben?

d) Berechnen Sie $\det A$.

5. **a)** Gegeben sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Berechnen Sie die Normen $\|A\|_2$, $\|A\|_\infty$ und $\|A\|_1$.

(ii) Angenommen A sei in MATLAB eingegeben, mit welchen MATLAB-Statements können Sie `A2n`$= \|A\|_2$ berechnen? Geben Sie zwei verschiedene Lösungsarten an.

b) Bestimmen Sie die reelle Normalform der Matrix $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Gegeben sei das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(t) &= -2y_1(t) - 2y_2(t) \\ \ddot{y}_2(t) &= -y_1(t) - 3y_2(t) \end{aligned} \qquad (1)$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von (1).

b) Bestimmen Sie α, so dass die Lösung von (1) zu den Anfangsbedingungen

$y(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dot{y}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ \alpha \end{pmatrix}$ die Bedingung $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ erfüllt.

Viel Erfolg!