P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 10

Aufgabe 10.1 Skalarprodukt und Orthogonalität

10.1a) Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in $\mathbb{R}^2$ ist die Orthogonalprojektion von $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ der Vektor $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

√ (i) richtig

(ii) falsch

Die Orthogonalprojektion von $v = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ auf $w = \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist gegeben durch

$$\frac{\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle} w = \frac{15}{45}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

10.1b) $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

√ (i) richtig

(ii) falsch

Eine Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}\mathbf{a}^{(1)} & \mathbf{a}^{(2)} & \cdots & \mathbf{a}^{(n)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

ist genau dann orthogonal, wenn $\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ gilt. Nun beachte man, dass der Eintrag von $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$ in der Zeile i und der Spalte j gleich dem euklidischen Skalarprodukt der Spalte i und der Spalte j ist:

$$(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{A}^\top)_{ik}(A)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \langle \mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(j)}\rangle.$$

Somit ist die Orthogonalität von $\mathbf{A}$ äquivalent zu

$$\langle \mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{a}^{(j)} \rangle = (\mathbf{I}_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

für alle $1 \leq i, j \leq n$. Letzteres bedeutet genau, dass die Spalten von $\mathbf{A}$ eine Orthonormalbasis bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

10.1c) Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Stimmt es, dass das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren beliebig gross sein kann?

(i) richtig

$\surd$ (ii) falsch

Für zwei Einheitsvektoren v und w besagt die Cauchy-Schwarz Ungleichung (z.B. Satz 4.5 im Buch von Nipp/Stoffer)

$$\langle v, w \rangle^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle = 1 \cdot 1 = 1.$$

Daraus folgt $\langle v, w \rangle \leq 1$, das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren kann also nicht beliebig gross sein.

10.1d) Wir betrachten wieder $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren in diesem Vektorraum finden?

(i) richtig

$\surd$ (ii) falsch

Man beachte, dass paarweise orthogonale Einheitsvektoren in einem Vektorraum mit Skalarprodukt automatisch linear unabhängig sind (z.B. Satz 4.6 im Buch von Nipp/Stoffer). Somit kann es in einem Vektorraum der Dimension n höchstens n paarweise orthogonale Einheitsvektoren geben.

Aufgabe 10.2 Gram-Schmidt Algorithmus

10.2a) Gegeben seien die drei Vektoren

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens aus $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{a}^{(3)}$ eine orthonormale Basis $\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)}$. Benützen Sie das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

10.2b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bezüglich der in a) berechneten orthonormalen Basis $\mathbf{b}^{(1)},\ \mathbf{b}^{(2)},\ \mathbf{b}^{(3)}$, d.h.

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{b}^{(1)} + x_2\mathbf{b}^{(2)} + x_3\mathbf{b}^{(3)}.$$

Lösung: a) Es bezeichne $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Es induziert die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$ auf $\mathbb{R}^3$.

<u>Berechnung von $\mathbf{b}^{(1)}$</u>: $\mathbf{b}^{(1)} = \frac{\mathbf{a}^{(1)}}{\|\mathbf{a}^{(1)}\|_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.$

<u>Berechnung von $\mathbf{b}^{(2)}$</u>:

$$\langle \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{b}^{(1)}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{c}^{(2)} = \mathbf{a}^{(2)} - \langle \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{b}^{(1)}\rangle\, \mathbf{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{b}^{(2)} = \frac{\mathbf{c}^{(2)}}{\|\mathbf{c}^{(2)}\|_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

<u>Berechnung von $\mathbf{b}^{(3)}$</u>:

$$\langle \mathbf{a}^{(3)}, \mathbf{b}^{(1)}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\langle \mathbf{a}^{(3)}, \mathbf{b}^{(2)}\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{c}^{(3)} = \mathbf{a}^{(3)} - \langle \mathbf{a}^{(3)}, \mathbf{b}^{(1)}\rangle\, \mathbf{b}^{(1)} - \langle \mathbf{a}^{(3)}, \mathbf{b}^{(2)}\rangle\, \mathbf{b}^{(2)}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{b}^{(3)} = \frac{\mathbf{c}^{(3)}}{\|\mathbf{c}^{(3)}\|_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

b) Man kann natürlich die Matrix $\mathbf{B} = (\mathbf{b}^{(1)},\ \mathbf{b}^{(2)},\ \mathbf{b}^{(3)})$ definieren und $\mathbf{Bx} = \mathbf{v}$ nach $\mathbf{x}$ mit Gauss lösen. Weil $\mathbf{b}^{(1)}$, $\mathbf{b}^{(2)}$, $\mathbf{b}^{(3)}$ eine orthonormale Basis bildet, wissen wir aber aus der Vorlesung, dass sich $\mathbf{v}$ als

$$\mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}^{(1)} \rangle \mathbf{b}^{(1)} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}^{(2)} \rangle \mathbf{b}^{(2)} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}^{(3)} \rangle \mathbf{b}^{(3)}$$

schreiben lässt. Es gilt also für die Koordinaten x_1, x_2, x_3:

$$x_1 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}^{(1)} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2},$$

$$x_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}^{(2)} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\rangle = -\frac{5}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{14}{\sqrt{6}} = \sqrt{6},$$

$$x_3 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}^{(3)} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{7}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}.$$

Bemerkung: Das ist genau das Gleiche wie das Lösen von $\mathbf{Bx} = \mathbf{v}$ durch $\mathbf{x} = \mathbf{B}^\top \mathbf{v}$ (die Spalten von $\mathbf{B}$ sind orthonormiert, also ist $\mathbf{B}$ orthogonal und es gilt $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^\top$).

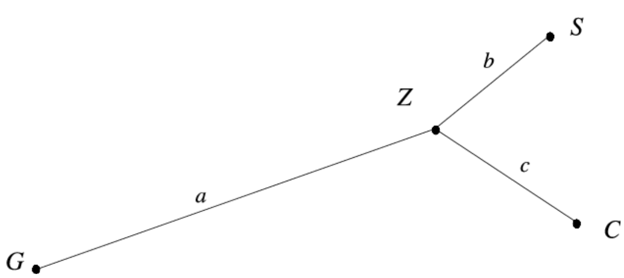
Die Beziehung $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}^{(i)} \rangle$ für $i = 1, 2, 3$ lässt sich auch sehr leicht direkt aus dem Ansatz herleiten:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \mathbf{b}^{(i)} \rangle &= \langle x_1 \mathbf{b}^{(1)} + x_2 \mathbf{b}^{(2)} + x_3 \mathbf{b}^{(3)}, \mathbf{b}^{(i)} \rangle \\ &= x_1 \langle \mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(i)} \rangle + x_2 \langle \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(i)} \rangle + x_3 \langle \mathbf{b}^{(3)}, \mathbf{b}^{(i)} \rangle \\ &= x_i, \end{aligned}$$

da $(\mathbf{b}^{(1)},\ \mathbf{b}^{(2)},\ \mathbf{b}^{(3)})$ eine orthonormale Basis ist.

Aufgabe 10.3 Velofahrer (Ausgleichsrechnung)

Ein trainierter Velofahrer fährt innerhalb einer Woche zwischen den Städten Zürich (Z), Chur (C), St. Gallen (S) und Genf (G) immer auf denselben Wegen hin und her. Dabei radelt er stets über Zürich. Er liest auf seinem Velocomputer folgende Distanzen ab:



Z–G	S–G	G–C	C–S	Z–C
280	390	400	210	118

Es fällt ihm auf, dass die Strecke G–C nicht der Summe der Strecken Z–G und Z–C entspricht und interessiert sich nun für die tatsächlichen Distanzen a, b, c.

10.3a) Lesen Sie für ihn alle Gleichungen für die Längen $a,\ b,\ c$ der Teilstrecken Z–G, Z–S, Z–C ab und schreiben Sie diese in der Form $\mathbf{A}(a,b,c)^\top = \mathbf{b}$.

Lösung: Zu lösen ist folgendes System

$$\left.\begin{array}{l} a \qquad -280 = r_1 \\ a+b-390 = r_2 \\ a+c-400 = r_3 \\ b+c-210 = r_4 \\ c \qquad -118 = r_5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{x}^*} = \underbrace{\begin{pmatrix} 280 \\ 390 \\ 400 \\ 210 \\ 118 \end{pmatrix}}_{=:\mathbf{b}}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b}$$

10.3b) Zeigen Sie, dass die beste approximative Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate gegeben ist durch $a^* = \frac{1711}{6}$, $b^* = \frac{301}{3}$ und $c^* = \frac{685}{6}$.

Lösung: Es gibt nun verschiedene Ansätze, zu zeigen, dass $a^* = \frac{1711}{6}$, $b^* = \frac{301}{3}$ und $c^* = \frac{685}{6}$ die beste approximative Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate darstellen. Sei dafür $\mathbf{x}^* := (a^*,\ b^*,\ c^*)^\top$.

Lösen wir im Sinne der kleinsten Quadrate, also sodass

$$\operatorname{argmin}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3} \|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2\,,$$

so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^\top\mathbf{b} \tag{10.3.1}$$

(durch Ableiten von $\|\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}\|_2^2$ und bestimmen der Nullstelle). Setzen wir die Zahlen ein, erhalten wir

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{A}^\top\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1070 \\ 600 \\ 728 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Gausselimination}$$

$$\begin{array}{|ccc|c|} \hline 3 & 1 & 1 & 1070 \\ 1 & 2 & 1 & 600 \\ 1 & 1 & 3 & 728 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & 2 & 1 & 600 \\ 0 & -5 & -2 & -730 \\ 0 & -1 & 2 & 128 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|ccc|c|} \hline 1 & 2 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & 2 & 128 \\ 0 & 0 & -12 & -1370 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1370}{12} = 114.1\overline{6} = \frac{685}{6} \\ -b+2c = 128 \Rightarrow b = \frac{1204}{12} = 100.\overline{3} = \frac{301}{3} \\ a+2b+c = 600 \Rightarrow a = \frac{3422}{12} = 285.1\overline{6} = \frac{1711}{6} \end{cases}$$

Also repräsentiert $\mathbf{x}^*$ tatsächlich die Bestapproximation.

Eine weitere Möglichkeit ist – und das ist die schnellere Variante – direkt zu zeigen, dass gilt

$$\mathbf{A}^\top(\mathbf{A}\mathbf{x}^*-\mathbf{b}) = \mathbf{0},$$

indem wir $\mathbf{x}^*$ in die Gleichung einsetzen.

10.3c) Wir nehmen nun an, dass die exakten Distanzen a, b, c gleich a^*, b^*, c^* aus 10.3b) sind. Welchen absoluten Fehler hat dann der Velocomputer in den fünf obigen Fahrten jeweils gemacht?

Lösung: Durch Einsetzen der exakten Distanzen in

$$|\mathbf{A}\mathbf{x}^* - \mathbf{b}|$$

erhalten wir den Fehlervektor $(\frac{31}{6}, \frac{9}{2}, \frac{2}{3}, \frac{9}{2}, \frac{23}{6})$, also

1. Fahrt Z-K: $|a - 280| = \frac{31}{6}$,
2. Fahrt G-K: $|(a + b) - 390| = \frac{9}{2}$,
3. Fahrt C-G: $|(a + c) - 400| = \frac{2}{3}$,
4. Fahrt C-K: $|(b + c) - 210| = \frac{9}{2}$,
5. Fahrt Z-C: $|c - 118| = \frac{23}{6}$.

Aufgabe 10.4 Betrachtung einer linearen Abbildung

In dieser Aufgabe üben wir das Konzept der linearen Abbildung aus Abschnitt 5 der Vorlesung und ihrer Matrixdarstellung an einem einfachen Beispiel.

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die folgende Selbstabbildung F von $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \stackrel{\mathsf{F}}{\mapsto} \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}.$$

10.4a) Interpretieren Sie diese Abbildung geometrisch, das heisst, beschreiben Sie wie sie auf Punkte in der Ebene wirkt.

Lösung: Die Abbildung dreht den Punkt $\mathbf{x}$ um $90°$ im Uhrzeigersinn um den Ursprung $\mathbf{0}$.

10.4b) Zeigen Sie: F ist eine lineare Abbildung.

Tipp: Dazu müssen Sie nur die Eigenschaften aus der Definition einer lineare Abbildung verifizieren.

Lösung: Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathsf{F}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) &= \mathsf{F}\begin{pmatrix} x_1 + \alpha y_1 \\ x_2 + \alpha y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 + \alpha y_2 \\ -x_1 - \alpha y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} \\ &= \mathsf{F}(\mathbf{x}) + \alpha\mathsf{F}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

10.4c) Durch welche Matrix $\mathbf{A}$ wird F bezüglich der kartesischen Basis aus Einheitsvektoren beschrieben?

Tipp: Schauen Sie sich den Beweis des Satzes, der aussagt, dass jede lineare Abbildung als Matrixmultiplikation beschrieben werden kann, nochmals an.

Lösung: Um die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ zu bestimmen, berechnen wir die Bilder der kartesischen Basisvektoren $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und drücken dann diese als Linearkombinationen der kartesischen Basisvektoren aus:

$$\begin{aligned} \mathsf{F}(\mathbf{e}_1) &= \mathsf{F}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + (-1) \cdot \mathbf{e}_2 \stackrel{!}{=} a_{11} \cdot \mathbf{e}_1 + a_{21} \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathsf{F}(\mathbf{e}_2) &= \mathsf{F}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 \stackrel{!}{=} a_{12} \cdot \mathbf{e}_1 + a_{22} \cdot \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10.5 Das Kreuzprodukt als lineare Abbildung

Oft findet man lineare Abbildung nicht beschrieben durch eine Matrix sondern durch andere Operationen. In diesem Beispiel betrachten wir für $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ die Abbildung

$$\mathsf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad \mathsf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} \,,$$

wobei $\times$ für das Vektorprodukt steht.

10.5a) Zeigen Sie, dass es sich bei F um eine lineare Abbildung handelt.

Lösung: Zu zeigen ist: Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\mathsf{F}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) = \mathsf{F}(\mathbf{x}) + \alpha\mathsf{F}(\mathbf{y}).$$

Beweis: Sei $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{F}(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}) = \mathsf{F}(\mathbf{z}) &\overset{\text{Def }\mathsf{F}}{=} \mathbf{a} \times \mathbf{z} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Def }\times}{=} \begin{pmatrix} a_2 z_3 - a_3 z_2 \\ a_3 z_1 - a_1 z_3 \\ a_1 z_2 - a_2 z_1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Def }\mathbf{z}}{=} \begin{pmatrix} a_2(x_3+\alpha y_3) - a_3(x_2+\alpha y_2) \\ a_3(x_1+\alpha y_1) - a_1(x_3+\alpha y_3) \\ a_1(x_2+\alpha y_2) - a_2(x_1+\alpha y_1) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} a_2 y_3 - a_3 y_2 \\ a_3 y_1 - a_1 y_3 \\ a_1 y_2 - a_2 y_1 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Def }\times}{=} \mathbf{a} \times \mathbf{x} + \alpha \mathbf{a} \times \mathbf{y} \\
&= \mathsf{F}(\mathbf{x}) + \alpha \mathsf{F}(\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

10.5b) Was ist die Matrixdarstellung von F bezüglich der kartesischen Basis aus Einheitsvektoren? Welche besondere Eigenschaft sehen Sie dieser Matrix sofort an?

Tipp: Erinnern Sie sich daran, dass man dazu zuerst die Bilder der Basisvektoren unter F bestimmen muss und dann deren Koordinaten. Das liefert die Spalten der Darstellungsmatrix.

Lösung: Man berechnet leicht:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{F}\mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ a_3 \\ -a_2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + a_3 \cdot \mathbf{e}_2 + (-a_2) \cdot \mathbf{e}_3 \\
\mathsf{F}\mathbf{e}_2 &= \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix} = (-a_3) \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + a_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\
\mathsf{F}\mathbf{e}_3 &= \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix} = a_2 \cdot \mathbf{e}_1 + (-a_1) \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3.
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir durch Koeffizientenvergleich die Matrixdarstellung

$$
\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Wir sehen, dass diese Matrix schiefsymmetrisch ist, das heisst $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$.

10.5c) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\mathsf{F})$.

Tipp: Den Nullraum kann man F direkt "ansehen" oder auch einfach dadurch bestimmen, dass man den Kern der Darstellungsmatrix ausrechnet.

Lösung: Geometrische Überlegung:

Aus der Vorlesung wissen wir, dass, für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, uns $\mathsf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x}$ einen Vektor liefert, welcher auf $\mathbf{x}$ und $\mathbf{a}$ senkrecht steht und Länge

$$\|\mathsf{F}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{a} \times \mathbf{x}\| = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{x}\| \sin\alpha$$

hat, wobei α den Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{x}$ bezeichnet, welches der Fläche des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{x}$ aufgespannten Parallelogramms entspricht. Somit gilt, da $\mathbf{y} = 0 \iff \|\mathbf{y}\| = 0$,

$$\begin{aligned}
\text{Kern}(\mathsf{F}) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : \mathsf{F}(\mathbf{x}) = 0\} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : \|\mathsf{F}(\mathbf{x})\| = 0\} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : \sin\alpha = 0\} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} : \alpha = 0 \text{ oder } \alpha = \pi\} \\
&= \text{span}(\mathbf{a})
\end{aligned}$$

Direkte Berechnung mit Darstellungsmatrix:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x} = 0 \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&\iff \quad \begin{pmatrix} a_3 & 0 & -a_1 \\ 0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\
\text{Falls } a_3 \neq 0: \qquad &\overset{a_3 z_3 + a_2 z_1}{\iff} \begin{pmatrix} a_3 & 0 & -a_1 \\ 0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & a_3 a_1 & -a_2 a_1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\
&\overset{z_3 + a_1 z_2}{\iff} \begin{pmatrix} a_3 & 0 & -a_1 \\ 0 & -a_3 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\
\Rightarrow a_3 \neq 0 : &x_3 = t \in \mathbb{R}, x_2 = \frac{a_2}{a_3} t, x_1 = \frac{a_1}{a_3} t \\
&\Rightarrow \text{Kern}(\mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{a}\frac{1}{a_3}) = \text{span}(\mathbf{a})
\end{aligned}$$

Falls $a_3 = 0$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} a_3 & 0 & -a_1 \\ 0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} -a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

und damit, falls $a_1 \neq 0, x_3 = 0, x_1 = t \in \mathbb{R}, x_2 = \frac{a_2}{a_1} t$. Falls $a_1 = 0$, dann ist, da $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, sicherlich $a_2 \neq 0$, und somit erhalten wir $x_3 = 0, x_1 = 0, x_2 = t \in \mathbb{R}$.

Damit erhalten wir in jedem Fall $\text{Kern}(\mathbf{A}) = \text{span}(\mathbf{a})$.

10.5d) Was ist $\operatorname{Rang}(\mathsf{F})$?

Lösung: Aus 10.5c) wissen wir, dass $\dim(\text{Kern}(\mathsf{F})) = 1$, und mithilfe der Dimensionsformel folgt

$$\text{Rang}(\mathsf{F}) = \dim(\text{Bild}(\mathsf{F})) = 3 - \dim(\text{Kern}(\mathsf{F})) = 2.$$

10.5e) Berechnen Sie $\langle \mathbf{x}, \mathsf{F}(\mathbf{x})\rangle$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, wobei $\langle , \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Lösung: Da $\mathsf{F}(\mathbf{x}) \perp \mathbf{x}$ aus den Eigenschaften des Vektorprodukts folgt, gilt $\langle \mathsf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle = 0$ (man kann dies auch explizit berechnen).

Aufgabe 10.6 Geometrische Interpretation einer linearen Abbildung

Gegeben sei ein *Einheits*vektor $\mathbf{v}$ des $\mathbb{R}^3$, d. h. $\|\mathbf{v}\| = 1$. Die 3×3 Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{H}$ seien definiert durch

$$\mathbf{A} := \mathbf{v}\mathbf{v}^\top, \qquad \mathbf{P} := \mathbf{I}_3 - \mathbf{v}\mathbf{v}^\top, \qquad \mathbf{H} := \mathbf{I}_3 - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top,$$

wobei $\mathbf{I}_3$ die 3×3-Einheitsmatrix bezeichnet.

10.6a) Berechnen Sie $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{H}^2$.

Lösung: Es ergibt sich Folgendes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}^2 &= \mathbf{v} \underbrace{\mathbf{v}^\top\mathbf{v}}_{=\|\mathbf{v}\|^2=1} \mathbf{v}^\top = \mathbf{v}\mathbf{v}^\top = \mathbf{A},\\
\mathbf{P}^2 &= (\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})^2 = \mathbf{I}_3 - 2\mathbf{A} + \mathbf{A}^2 \overset{\mathbf{A}^2=\mathbf{A}}{=} \mathbf{I}_3 - \mathbf{A} = \mathbf{P},\\
\mathbf{H}^2 &= (\mathbf{I}_3 - 2\mathbf{A})^2 = \mathbf{I}_3 - 4\mathbf{A} + 4\mathbf{A}^2 \overset{\mathbf{A}^2=\mathbf{A}}{=} \mathbf{I}_3.
\end{aligned}$$

10.6b) Die Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{H}$ definieren lineare Abbildungen

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\\
\mathcal{P} &: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\\
\mathcal{H} &: \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

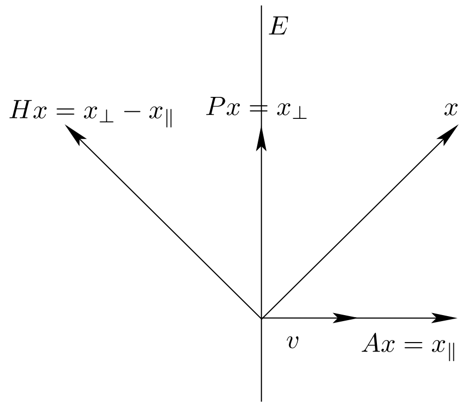
Beschreiben Sie die Abbildungen $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{H}$ geometrisch.

Tipp: Zerlegen Sie dazu den Vektor $\mathbf{x}$ in je eine Komponente orthogonal und parallel zu $\mathbf{v}$, d. h. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel$ mit $\mathbf{x}_\parallel = (\mathbf{x}, \mathbf{v})\mathbf{v}$ und $\mathbf{x}_\perp = \mathbf{x} - \mathbf{x}_\parallel$.

Lösung: Wir zerlegen $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel$, wobei $\mathbf{x}_\parallel$ die orthogonale Projektion von $\mathbf{x}$ auf $\mathbf{v}$ darstellt. Es gilt also $\mathbf{v}^\top\mathbf{x}_\perp = 0$ und $\mathbf{x}_\parallel = \lambda\mathbf{v}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_\perp + \mathbf{A}\mathbf{x}_\parallel = \mathbf{v}\underbrace{\mathbf{v}^\top\mathbf{x}_\perp}_{=0} + \mathbf{v}\mathbf{v}^\top\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}(\mathbf{v}^\top\mathbf{v}) = \mathbf{x}_\parallel,\\
\mathbf{P}\mathbf{x} &= (\mathbf{I}_3 - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_\parallel = \mathbf{x}_\perp,\\
\mathbf{H}\mathbf{x} &= (\mathbf{I}_3 - 2\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{x} - 2\mathbf{x}_\parallel = \underbrace{\mathbf{x} - \mathbf{x}_\parallel}_{\mathbf{x}_\perp} - \mathbf{x}_\parallel = \mathbf{x}_\perp - \mathbf{x}_\parallel.
\end{aligned}$$

Daher ist $\mathcal{A}$ die orthogonale Projektion auf $\mathbf{v}$, $\mathcal{P}$ die Projektion auf die Ebene E, welche senkrecht zu $\mathbf{v}$ steht, und $\mathcal{H}$ die Spiegelung an E.



Veröffentlichung am 24. November 2015.

Abzugeben bis 2. Dezember 2015.