P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 11

Aufgabe 11.1 Unterräume bestimmen

In der Vorlesung wurde kurz angetönt, was ein Vektorraum ganz allgemein ist: Ein Vektorraum V ist eine Menge, die mit einer Addition und einer Skalarmultiplikation versehen ist, welche gewisse Kompatibilitätseigenschaften erfüllen (z.B. die Assoziativität und Kommutativität der Addition oder Distributivgesetze). Diese zwei Vorschriften erlauben es, Elemente des Vektorraums zu addieren und mit einem Skalar (einer "Zahl") zu multiplizieren. Dabei ist es möglich, auf derselben Menge verschiedene Vektorraumstrukturen (das heisst, verschiedene Additionen und Skalarmultiplikationen) zu definieren. Manchmal schreibt man deshalb $(V, +, \cdot)$ anstatt nur V, wobei die Operationen $+$ und $\cdot$ vorgängig definiert wurden, um klarer darzustellen, welcher Vektorraum gemeint ist.

Sind die folgenden Untermengen des $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume des Vektorraums $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ (wobei $+$ und $\cdot$ hier die gewöhnliche Addition und Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^3$ bezeichnen)?

11.1a) Die Ebene $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : v_1 = v_2 \right\}$.

Lösung: Ja. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ so, dass $v_1 = v_2$ und $w_1 = w_2$. Es gilt dann

$$\alpha \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot v_1 + w_1 \\ \alpha \cdot v_2 + w_2 \\ \alpha \cdot v_3 + w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot v_1 + w_1 \\ \alpha \cdot v_1 + w_1 \\ \alpha \cdot v_3 + w_3 \end{pmatrix},$$

das heisst, die ersten zwei Komponenten stimmen berein. Da $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ beliebige Elemente aus der gegebenen Menge und α ein beliebiger Skalar waren, ist die gegebene Menge also ein Unterraum.

11.1b) Die Ebene $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : v_1 = 1 \right\}$.

Lösung: Nein, da für ein $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ mit $v_1 = 1$ der Vektor $\alpha \cdot \mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} \alpha \\ \alpha \cdot v_2 \\ \alpha \cdot v_3 \end{smallmatrix}\right)$ nicht in der Menge liegt, falls zum Beispiel $\alpha = \frac{1}{2}$.

11.1c) Die Menge $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 = 0 \right\}$.

Lösung: Nein, da es für $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ mit $v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 = 0$ und $w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 = 0$ noch keine Garantie gibt, dass $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ dieselbe Eigenschaft hat, das heisst, dass $(v_1 + w_1) \cdot (v_2 + w_2) \cdot (v_3 + w_3) = 0$ gilt. Man nehme zum Beispiel $\mathbf{v} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathbf{w} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann liegen $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ in der Menge, aber $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, also $(v_1 + w_1) \cdot (v_2 + w_2) \cdot (v_3 + w_3) = 1$ und $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ liegt nicht in der Menge.

11.1d) Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : v_1 + v_2 + v_3 = 0 \right\}$.

Lösung: Ja. Gleich wie in 11.1a) nehmen wir $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ so, dass $v_1 + v_2 + v_3 = 0$ und $w_1 + w_2 + w_3 = 0$. Dann erhalten wir

$$\alpha \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot v_1 + w_1 \\ \alpha \cdot v_2 + w_2 \\ \alpha \cdot v_3 + w_3 \end{pmatrix}$$

und weiter

$$(\alpha \cdot v_1 + w_1) + (\alpha \cdot v_2 + w_2) + (\alpha \cdot v_3 + w_3) = \alpha \cdot (v_1 + v_2 + v_3) + (w_1 + w_2 + w_3) = 0,$$

also ist die Menge in der Tat ein Unterraum.

11.1e) Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : v_1 \leq v_2 \leq v_3 \right\}$.

Lösung: Nein, da für $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $v_1 \leq v_2 \leq v_3$ nicht garantiert ist, dass $\alpha \cdot \mathbf{v}$ dies auch erfüllt. Man betrachte beispielsweise $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\alpha = -1$, so dass $v_1 \leq v_2 \leq v_3$, aber $\alpha v_1 > \alpha v_2 > \alpha v_3$.

11.1f) Die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $\mathbf{v} = (1, 4, 0)^\top$ and $\mathbf{w} = (2, 2, 3)^\top$.

Lösung: Ja, die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren (was nichts anderes als der span dieser Vektoren ist) genügt den Bedingungen eines Unterraums per Definition.

Im Folgenden betrachten wir den Vektorraum $C(\mathbb{R}) = (C(\mathbb{R}), +, \cdot)$, den Vektorraum der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Für zwei stetige Funktionen $f, g \in C(\mathbb{R})$ ist die Additionsvorschrift $+$ wie gewöhnlich punktweise definiert:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ebenso ist die skalare Multiplikationsvorschrift $\cdot$ für einen Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $f \in C(\mathbb{R})$ punktweise gegeben:

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ausserdem betrachten wir den Unterraum $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = (\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ von $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$, welcher der Menge aller Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich n entspricht. Insbesondere erbt $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ die Addition und Skalarmultiplikation von $C(\mathbb{R})$. Es lässt sich sehr schnell überprüfen, dass $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ ein Unterraum von $C(\mathbb{R})$ ist.

11.1g) Ist $\left\{ f \in C(\mathbb{R}) : \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \right\}$ ein Untervektorraum von $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$?

Lösung: Ja. Wir nehmen beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $f, g \in C(\mathbb{R})$ so, dass $\int_0^1 f(x) dx = 0$ und $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Dann gilt für $h = \alpha \cdot f + \beta \cdot g$, dass

$$\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \cdot \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \cdot \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

aufgrund der Linearität der Integration. Also ist die Menge ein Unterraum von $C(\mathbb{R})$. Natürlich hätte es auch hier wie immer gereicht, nur den Fall mit $\beta = 1$ anzuschauen.

11.1h) Ist $\{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(0) = 1\}$ ein Untervektorraum von $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$?

Lösung: Nein, da für $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ mit $p(0) = 1$ und $q(0) = 1$ das Polynom $r = p + q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ erfüllt, dass

$$r(0) = p(0) + q(0) = 2.$$

11.1i) Ist $\{p \in \mathcal{P}_7(\mathbb{R}) : p(0) = 2p'(0)\}$ ein Untervektorraum von $(\mathcal{P}_7(\mathbb{R}), +, \cdot)$?

Lösung: Ja. Wähle beliebige $p, q \in \mathcal{P}_7(\mathbb{R})$ so, dass $p(0) = 2 \cdot p'(0)$ und $q(0) = 2 \cdot q'(0)$. Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt dann

$$(\alpha \cdot p + \beta \cdot q)(0) = \alpha \cdot p(0) + \beta \cdot q(0) = 2 \cdot \alpha \cdot p'(0) + 2 \cdot \beta \cdot q'(0) = 2 \cdot (\alpha \cdot p + \beta \cdot q)'(0).$$

Also ist $\alpha \cdot p + \beta \cdot q$ auch in der Menge, die folglich ein Unterraum ist. Natürlich hätte es auch hier wie immer gereicht, nur den Fall mit $\beta = 1$ anzuschauen.

Aufgabe 11.2 Vektorraum der Polynome

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit dem Vektorraum $\mathcal{P}_2([-1,1])$ der Polynome auf $[-1,1]$ vom Grad kleiner oder gleich 2, vergleiche mit Aufgabe 11.1.

Sei $\mathcal{A} = \{a^{(1)} := 1,\ a^{(2)} := 1 + 2x,\ a^{(3)} := x^2 + x - 1\} \subseteq \mathcal{P}_2([-1,1])$.

11.2a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Basis von $\mathcal{P}_2([-1,1])$ ist.

11.2b) Sei $p(x) \coloneqq 5x^2 + x - 3 \in \mathcal{P}_2([-1,1])$. Finden Sie die Koordinaten von p bezüglich der Basis $\mathcal{A}$.

11.2c) Auf $\mathcal{P}_2([-1,1])$ ist durch

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{P}_2([-1,1])$$

ein Skalarprodukt definiert. Bestimmen Sie alle Vektoren aus $\mathcal{P}_2([-1,1])$, welche bezüglich diesem Skalarprodukt senkrecht auf $a^{(1)}$ stehen.

11.2d) Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ eine orthonormale Basis von $\mathcal{P}_2([-1,1])$ bezüglich des Skalarprodukts aus Teilaufgabe 11.2c).

Lösung: a) Mit der Basis $\mathcal{A}$ lassen sich offensichtlich die Basisvektoren der Standardbasis $\{1, x, x^2\}$ als Linearkombination darstellen, welche ihrerseits $\mathcal{P}_2([-1,1])$ erzeugen. Damit ist auch $\mathcal{A}$ erzeugend. Weiter ist bekannt, dass $\mathcal{P}_2([-1,1])$ Dimension drei hat (allgemeiner hat der Vektorraum $\mathcal{P}_n$ Dimension $n+1$). Also sind drei erzeugende Vektoren von $\mathcal{P}_2([-1,1])$ immer auch linear unabhängig und damit eine Basis.

b) Die Koordinaten $a, b, c \in \mathbb{R}$ von $p \in \mathcal{P}_2([-1,1])$ erfüllen per Definition folgende Gleichung:

$$5x^2 + x - 3 = a \cdot 1 + b \cdot (1 + 2x) + c \cdot (x^2 + x - 1).$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

welches die eindeutige Lösung

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

besitzt. Dies sind die Koordinaten von p bezüglich der Basis $\mathcal{A}$.

c) Ein allgemeines Element aus $\mathcal{P}_2([-1,1])$ ist von der Form $q(x) = ax^2 + bx + c$. Damit q bezüglich des gegebenen Skalarprodukts senkrecht auf $a^{(1)}$ steht, muss

$$\begin{aligned} 0 \overset{!}{=} \langle q(x), a^{(1)}(x) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} q(x) a^{(1)}(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (ax^2 + bx + c) \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{3} x^3 + \frac{b}{2} x^2 + cx \right) \Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{3} + 2c \right) \end{aligned}$$

gelten. Dies ist gleichbedeutend mit $a = -3c$ und wir erhalten, dass alle Polynome der Form

$$q(x) = -3cx^2 + bx + c$$

mit $b,\, c \in \mathbb{R}$ bezüglich des gegebenen Skalarprodukts senkrecht auf $a^{(1)} = 1$ stehen.

d) Es bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das gegebene Skalarprodukkt auf $\mathcal{P}_2([-1,1])$. Sei $\|\cdot\|$ die davon induzierte Norm auf $\mathcal{P}_2([-1,1])$ (das heisst, $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ für alle $f \in \mathcal{P}_2([-1,1])$). Wir bezeichnen die noch zu berechnende orthonormale Basis mit $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)}$ und führen das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren durch.

Berechnung von $b^{(1)}$:

$$\begin{aligned} \|a^{(1)}\|^2 &= \langle 1, 1 \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} 1 \,\mathrm{d}x = 1 \\ \Rightarrow b^{(1)} &= \frac{a^{(1)}}{\|a^{(1)}\|} = \frac{1}{1} = 1. \end{aligned}$$

Berechnung von $b^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \langle a^{(2)},\, b^{(1)} \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} (1 + 2x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \big(x + x^2 \big) \Big|_{-1}^{1} = 1 \\ \Rightarrow c^{(2)} &= a^{(2)} - \langle a^{(2)},\, b^{(1)} \rangle\, b^{(1)} = 1 + 2x - 1 = 2x, \\ \|c^{(2)}\|^2 &= \langle 2x, 2x \rangle = \int_{-1}^{1} 2x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} x^3 \Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3} \\ \Rightarrow b^{(2)} &= \frac{c^{(2)}}{\|c^{(2)}\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} 2x = \sqrt{3} x. \end{aligned}$$

Berechnung von $b^{(3)}$:

$$\langle a^{(3)},\, b^{(1)}\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x\right)\Big|_{-1}^{1} = -\frac{2}{3},$$

$$\langle a^{(3)},\, b^{(2)}\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+x-1)(\sqrt{3}x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow c^{(3)} &= a^{(3)} - \langle a^{(3)},\, b^{(1)}\rangle\, b^{(1)} - \langle a^{(3)},\, b^{(2)}\rangle\, b^{(2)} \\
&= x^2+x-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}x = x^2-\frac{1}{3} \\
\|c^{(3)}\|^2 &= \left\langle x^2-\frac{1}{3}, x^2-\frac{1}{3}\right\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left(x^4-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{9}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{9}x^3+\frac{1}{9}x\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{45} \\
\Rightarrow\ b^{(3)} &= \frac{c^{(3)}}{\|c^{(3)}\|} = \frac{\sqrt{45}}{2}\left(x^2-\frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2-1).
\end{aligned}$$

Das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren liefert somit die folgende orthonormale Basis:

$$\left\{1,\ \sqrt{3}x,\ \frac{\sqrt{5}}{2}(3x^2-1)\right\}.$$

Aufgabe 11.3 Multiple Choice: Linearität von Abbildungen

Entscheiden Sie bei den folgenden neun Abbildungen, ob diese linear sind oder nicht, und geben Sie eine Begründung an.

11.3a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x+y, 2x, 0)^\top$

√ (i) f ist linear

(ii) f ist nicht linear

Eine Abbildung $f : V \to W$ zwischen zwei reellen Vektorräumen V und W heisst linear, falls für alle $x, y \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

- $f(x+y) = f(x) + f(y)$,
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Für eine Abbildung der Form

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \mathbf{v} \mapsto \mathbf{A}\cdot\mathbf{v},$$

wobei $\mathbf{A}$ eine $m \times n$-Matrix ist, sind diese Eigenschaften erfüllt. Diese erste Abbildung und die dritte, vierte und fünfte Abbildung sind von dieser Form für die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, (0), (1).$$

Daher sind diese Abbildungen linear.

11.3b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 1)^\top$

(i) f ist linear

√ (ii) f ist nicht linear

Jede lineare Abbildung muss Null auf Null abbilden, das heisst, $f(0_V) = 0_W$ für jede lineare Abbildung $f \colon V \to W$ (V, W seien Vektorräume und $0_V, 0_W$ die jeweiligen Nullvektoren). Dies folgt direkt aus der Linearität (siehe Erklärung zur ersten Abbildung). Sie bedingt nämlich unter anderem, dass $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ und, nach Subtraktion von $f(0)$, also $f(0) = 0$. Für die vorliegende Abbildung (und die sechste und achte Abbildung) ist dies nicht erfüllt. Wir rechnen nach: $f(0) = (0, 0, 1)^\top \neq 0 = (0, 0, 0)^\top$; die Abbildung ist also nicht linear.

11.3c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

√ (i) f ist linear

(ii) f ist nicht linear

Siehe Erklärung zur ersten Abbildung.

11.3d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$

√ (i) f ist linear

(ii) f ist nicht linear

Siehe Erklärung zur ersten Abbildung.

11.3e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f die Identität

√ (i) f ist linear

(ii) f ist nicht linear

Siehe Erklärung zur ersten Abbildung.

11.3f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$

(i) f ist linear

$\surd$ (ii) f ist nicht linear

Falsch: $f(0) = 1 \neq 0$; siehe Erklärung zur zweiten Abbildung.

11.3g) $f : C^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ h \mapsto h''(0)$ (Hier bezeichnet $C^2(\mathbb{R})$ die Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$.)

$\surd$ (i) f ist linear

(ii) f ist nicht linear

Die Linearität folgt aus den Ableitungsregeln: Es gilt $(g+h)'' = g'' + h''$ und $(\alpha h)'' = \alpha h''$ für alle $g,\ h \in C^2(\mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

11.3h) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f beschreibt die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$

(i) f ist linear

$\surd$ (ii) f ist nicht linear

Falsch: $f(0) = (-1, 1)^\top \neq 0$; siehe Erklärung zur zweiten Abbildung.

11.3i) $f : \mathbb{R}^2 \to C^\infty(\mathbb{R}),\ (x, y)^\top \mapsto h$, wobei h diejenige Linearkombination der Funktionen $\sin$ und $\cos$ ist, deren Graph durch die Punkte $(-1, x)$ und $(1, y)$ geht. (Hier bezeichnet $C^\infty(\mathbb{R})$ die Menge aller unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$.)

$\surd$ (i) f ist linear

(ii) f ist nicht linear

Das Bild von $(x, y)^\top$ unter dieser Abbildung ist gleich $\alpha \cdot \sin + \beta \cdot \cos$, wobei (α, β) die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \alpha \sin(-1) + \beta \cos(-1) &= x \\ \alpha \sin(1) + \beta \cos(1) &= y \end{aligned}$$

ist. Dieses hat die eindeutige Lösung

$$\alpha = \frac{y - x}{2 \cdot \sin 1},\ \beta = \frac{x + y}{2 \cdot \cos 1}.$$

Somit ist f durch

$$(x, y)^\top \longmapsto \frac{y - x}{2 \cdot \sin 1} \sin + \frac{x + y}{2 \cdot \cos 1} \cos$$

gegeben und es gilt

$$\begin{aligned}
f\big((x,y)^\top + (x',y')^\top\big) &= f\big((x+x', y+y')^\top\big)\\
&= \frac{(y+y')-(x+x')}{2\cdot\sin 1}\sin + \frac{(x+x')+(y+y')}{2\cdot\cos 1}\cos\\
&= \frac{y-x}{2\cdot\sin 1}\sin + \frac{x+y}{2\cdot\cos 1}\cos + \frac{y'-x'}{2\cdot\sin 1}\sin + \frac{x'+y'}{2\cdot\cos 1}\cos\\
&= f\big((x,y)^\top\big) + f\big((x',y')^\top\big)
\end{aligned}$$

sowie für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f\big(\alpha(x,y)^\top\big) &= f\big((\alpha x, \alpha y)^\top\big)\\
&= \frac{\alpha y - \alpha x}{2\cdot\sin 1}\sin + \frac{\alpha x + \alpha y}{2\cdot\cos 1}\cos = \alpha\left(\frac{y-x}{2\cdot\sin 1}\sin + \frac{x+y}{2\cdot\cos 1}\cos\right)\\
&= \alpha f\big((x,y)^\top\big).
\end{aligned}$$

Somit ist f linear.

Aufgabe 11.4 Abbildungsmatrizen

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass jede lineare Abbildung (zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen) als Matrix dargestellt werden kann. In dieser Aufgabe erhalten Sie drei Beispiele von linearen Selbstabbildungen auf dem $\mathbb{R}^3$, deren Abbildungsmatrizen bezüglich der Standerbasis im $\mathbb{R}^3$ Sie bestimmen sollen.

11.4a) Seien E_1, E_2 und E_3 die Punkte $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ im $\mathbb{R}^3$ und seien M_1, M_2 und M_3 die Mittelpunkte der Strecken $\overline{E_1E_2}$, $\overline{E_2E_3}$ und $\overline{E_3E_1}$.

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis der linearen Abbildung $\mathcal{F}$, welche E_i nach M_i, $i = 1,2,3$, abbildet. Bestimmen Sie ausserdem alle Fixpunkte von $\mathcal{F}$, das heisst, alle Punkte P mit $\mathcal{F}(P) = P$.

Lösung: Es sei $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(3)}\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Aus

- $\mathcal{F}(\mathbf{e}^{(1)}) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{(1)} + \mathbf{e}^{(2)})$,
- $\mathcal{F}(\mathbf{e}^{(2)}) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{(2)} + \mathbf{e}^{(3)})$,
- $\mathcal{F}(\mathbf{e}^{(3)}) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{(3)} + \mathbf{e}^{(1)})$

lesen wir ab, dass die Abbildungsmatrix von $\mathcal{F}$ gegeben ist durch

$$\mathbf{K}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ein Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ erfüllt $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ genau dann, wenn er der Matrixgleichung $\mathbf{K}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{F})\mathbf{x} = \mathbf{x}$ beziehungsweise $(\mathbf{K}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) - \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ genügt. Anwendung des Gaussalgorithmus ergibt

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Somit ist $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$ und $x_1 = x_2 = x_3 = \alpha$. Daher sind die Fixpunkte P von $\mathcal{F}$ von der Form $P = \mathbf{x} = \alpha(1,1,1)^\top$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

11.4b) Sei $\mathbf{p} = (1,2,2)^\top$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis der Abbildung $\mathcal{G}$, welche jeden Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf $\mathbf{p}$ projiziert (stellen Sie zuerst fest, dass $\mathcal{G}$ wirklich eine lineare Abbildung definiert).

Lösung: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Projektion eines Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ auf den Vektor $\mathbf{p}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{G}(\mathbf{x}) = \operatorname{proj}_{\mathbf{p}} \mathbf{x} = \frac{\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle} \mathbf{p}.$$

Aufgrund der Linearität des Skalarprodukts ist $\mathcal{G}$ offensichtlich linear und wir können die entsprechende Abbildungsmatrix bestimmen. Für die Projektionen der Standardbasisvektoren gilt

- $\mathcal{G}(\mathbf{e}^{(1)}) = \frac{1}{9}(1,2,2)^\top$,
- $\mathcal{G}(\mathbf{e}^{(2)}) = \frac{2}{9}(1,2,2)^\top$,
- $\mathcal{G}(\mathbf{e}^{(3)}) = \frac{2}{9}(1,2,2)^\top$.

Damit lautet die Abbildungsmatrix von $\mathcal{G}$

$$\mathbf{K}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{G}) = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

11.4c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich der Standarbasis von derjenigen Abbildung, die für jeden Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $\mathcal{F}$ (siehe Teilaufgabe 11.4a)) auf die orthogonalen Projektion des Vektors $\mathbf{x}$ auf den Vektor $\mathbf{p}$ (siehe Teilaufgabe 11.4b)) anwendet.

Lösung: Die beschriebene Abbildung ist genau die Verknüpfung $\mathcal{F} \circ \mathcal{G}$ von $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{G}$. Deren Abbildungsmatrix bezüglich der Standarbasis ist gegeben durch das Matrixprodukt

$$\mathbf{K}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{F})\mathbf{K}_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{G}) = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix},$$

siehe Vorlesung.

Aufgabe 11.5 Abbildungsmatrix einer Polynomabbildung

Sei $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich 3, vergleiche mit Aufgabe 11.1. Gegeben sei folgende Abbildung:

$$\mathcal{F}\colon \begin{array}{rcl} \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \\ p(x) & \mapsto & p''(x) + xp'(x) \end{array}$$

11.5a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

11.5b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathbf{K}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis des $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, der Monombasis $\mathcal{B}_1 := \{1, x, x^2, x^3\}$.

11.5c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathbf{K}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2 := \{1 + x^3, x - x^2, x^2 + x^3, x^3\} \subseteq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Tipp: Sie können diese Aufgabe mithilfe von Basiswechselmatrizen lösen.

Lösung: a) Wir rechnen für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ die Linearität von $\mathcal{F}$ direkt nach:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\alpha p(x) + \beta q(x)) &= (\alpha p(x) + \beta q(x))'' + x(\alpha p(x) + \beta q(x))' \\ &= \alpha p''(x) + \beta q''(x) + x\alpha p'(x) + x\beta q'(x) \\ &= \alpha(p''(x) + xp'(x)) + \beta(q''(x) + xq'(x)) \\ &= \alpha\mathcal{F}(p(x)) + \beta\mathcal{F}(q(x)).\end{aligned}$$

b) Die Koordinaten der Bilder der Basis bilden die Spalten der Darstellungsmatrix.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(1) &= 0, \\ \mathcal{F}(x) &= x, \\ \mathcal{F}(x^2) &= 2 + x \cdot 2x = 2 + 2x^2, \\ \mathcal{F}(x^3) &= 6x + x \cdot 3x^2 = 6x + 3x^3.\end{aligned}$$

Wir erhalten somit $\mathbf{K}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Wir könnten hier analog zur vorherigen Teilaufgabe vorgehen, wollen aber eine Lösung via Basiswechsel präsentieren. Wie wir wissen, gilt

$$\mathbf{K}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}(\mathcal{F}) = \mathbf{K}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(\mathsf{Id}) \cdot \mathbf{K}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(\mathcal{F}) \cdot \mathbf{K}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(\mathsf{Id}).$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{K}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(\mathsf{Id})$ die Matrix zum Basiswechsel von der Basis $\mathcal{B}_2$ in die Basis $\mathcal{B}_1$. In ihren Spalten stehen also die Koordinaten der Vektoren aus der Basis $\mathcal{B}_2$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$. Da $\mathcal{B}_1$ die Standardbasis ist, kann man diese direkt ablesen:

$$\mathbf{K}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(\mathsf{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter gilt $\mathbf{K}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(\mathsf{Id}) = (\mathbf{K}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(\mathsf{Id}))^{-1}$, also

$$\mathbf{K}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}(\mathsf{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine kurze Rechnung liefert nun

$$\mathbf{K}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 6 & 6 \\ 6 & -1 & 8 & 6 \\ -3 & 3 & -7 & -3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.6 Polynomielle Projektion

In dieser Aufgabe betrachten wir erneut die Polynomräume $\mathcal{P}_d([-1,1])$ für $d \in \mathbb{N}$. Er ist ausgestattet mit dem *Skalarprodukt*

$$\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{für alle } p, q \in \mathcal{P}_d([-1,1])$$

(Achtung: Es unterscheidet sich vom Skalarprodukt in Aufgabe 11.2.) und der *Monombasis*

$$\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, \dots, t \mapsto t^d\}.$$

Weiter seien die linearen Abbildungen $\mathcal{L}_d : \mathcal{P}_d([-1,1]) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\mathcal{L}_d(p) = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(1) \end{pmatrix}, \quad p \in \mathcal{P}_d([-1,1]).$$

Schliesslich sind die ersten drei der sogenannten *Legendre-Polynome* gegeben durch

$$P_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2-1).$$

Wir betrachten nun Konzepte, wie sie im Zusammenhang mit der Diskussion linearer Abbildungen in der Vorlesung besprochen worden sind, für diesen Polynomraum.

11.6a) Geben Sie die Matrixdarstellung $\mathbf{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{L}_2)$ von $\mathcal{L}_2$ bezüglich der monomialen Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{P}_2([-1,1])$ und der Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^2$ an.

Lösung: Es ist

$$\mathcal{L}_d(t^i) = \begin{pmatrix} (-1)^i \\ 1^i \end{pmatrix} = \begin{cases} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) & i \text{ gerade} \\ \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) & i \text{ ungerade} \end{cases},$$

und somit gilt

$$\mathbf{K}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{L}_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

11.6b) Zeigen Sie, dass $\{P_0, P_1, P_2\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_2([-1,1])$ ist.

Lösung: Wir müssen zeigen, dass $\langle P_i, P_j \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ für $i, j = 0, 1, 2$. Da das Skalarprodukt symmetrisch ist, genügt es, die Fälle $i \leq j$ anzuschauen:

$$\begin{aligned}
\langle P_0, P_0 \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} t \Big|_{t=1}^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\
\langle P_1, P_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}} t \sqrt{\frac{3}{2}} t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} t^3 \Big|_{t=-1}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\
\langle P_2, P_2 \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{5}{8} (3t^2 - 1)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{5}{8} \int_{-1}^{1} 9t^4 - 6t^2 + 1 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{9}{8} t^5 - \frac{10}{8} t^3 + \frac{5}{8} t \Big|_{t=-1}^{1} = \frac{9}{4} - \frac{10}{4} + \frac{5}{4} = 1 \\
\langle P_0, P_1 \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{3}}{2} t \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{3}}{4} t^2 \Big|_{t=-1}^{1} = 0 \\
\langle P_0, P_2 \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{5}}{4} (3t^2 - 1) \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{5}}{4} t^3 - \frac{\sqrt{5}}{4} t \Big|_{t=-1}^{1} = 0 \\
\langle P_1, P_2 \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{15}}{4} (3t^3 - t) = \frac{\sqrt{15}}{4} (\frac{3}{4} t^4 - \frac{1}{2} t^2) \Big|_{t=-1}^{1} = 0
\end{aligned}$$

11.6c) Bestimmen Sie nun die Matrixdarstellung $\mathbf{K}_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{L}_2)$ von $\mathcal{L}_2$ bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}} = \{P_0, P_1, P_2\}$ von $\mathcal{P}_2([-1,1])$ und der Standardbasis $\mathcal{E}$ des $\mathbb{R}^2$.

Lösung: Wir können entweder einen Basiswechsel mit dem Resultat aus 11.6a) durchführen (siehe Aufgabe 11.5) oder erhalten durch einfaches einsetzen der Basis in die Funktion

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{L}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{pmatrix}.$$

11.6d) Der *Rang* einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V und W ist definiert als die Dimension ihres Bildes $f(V)$ als Unterraum von W. Er entspricht dem Rang jeder zugehörigen Abbildungsmatrix. Was ist für allgemeines d der Rang von $\mathcal{L}_d$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Wie wir in Aufgabe 11.6a) gesehen haben, gilt $\mathcal{L}_d(t^i) = \begin{pmatrix} (-1)^i \\ 1^i \end{pmatrix}$. Mit Gausselimination erhalten wir

$$\mathbf{K}_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{L}_d) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Weil der Rang von $\mathcal{L}_d$ mit demjenigen jeder beliebigen Abbildungsmatrix von $\mathcal{L}_d$ übereinstimmt (das heisst, es kommt nicht auf die Wahl der jeweiligen Basen an), folgt

$$\operatorname{Rang} \mathcal{L}_d = \operatorname{Rang} \mathbf{K}_{\tilde{\mathcal{B}}}^{\mathcal{E}}(\mathcal{L}_d) = \begin{cases} 1, & d = 0 \\ 2, & d \geq 1 \end{cases}.$$

11.6e) Zeigen Sie, dass für $d \geq 2$

$$\mathcal{B}_{\text{Kern}} = \{t \mapsto 1 - t^2, t \mapsto t(1-t^2), t \mapsto t^2(1-t^2), \ldots, t \mapsto t^{d-2}(1-t^2)\}$$

eine Basis von $\operatorname{Kern}(\mathcal{L}_d)$ ist.

Tipp: Bestimmen Sie zunächst $\dim \operatorname{Kern}(\mathcal{L}_d)$ mithilfe der Dimensionsformel und Teilaufgabe 11.6d). Zeigen Sie dann, dass $\mathcal{B}_{\text{Kern}}$ im Kern enthalten und linear unabhängig ist.

Lösung: Mithilfe von 11.6d) und der Dimensionsformel erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&\dim \mathcal{P}_d([-1,1]) = \dim \operatorname{Kern}(\mathcal{L}_d) + \underbrace{\dim \operatorname{Bild}(\mathcal{L}_d)}_{=\operatorname{Rang} \mathcal{L}_d} \\
\iff\ &\dim \operatorname{Kern}(\mathcal{L}_d) = \dim \mathcal{P}_d([-1,1]) - \operatorname{Rang} \mathcal{L}_d \\
&\phantom{\dim \operatorname{Kern}(\mathcal{L}_d)} = d + 1 - 2 = d - 1.
\end{aligned}$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\mathcal{B}_{\text{Kern}} = \{p_1(t) = 1 - t^2, p_2(t) = t(1-t^2), p_3(t) = t^2(1-t^2), \ldots, p_{d-1}(t) = t^{d-2}(1-t^2)\}$ im Kern enthalten und linear unabhängig ist. Diese $d-1$ linear unabhängigen Vektoren bilden dann automatisch eine Basis von $\operatorname{Kern}(\mathcal{L}_d)$.

- $\mathcal{B}_{\text{Kern}} \subset \operatorname{Kern}(\mathcal{L}_d)$: $\mathcal{L}_d(p_i) = \begin{pmatrix} (-1)^{i-1}(1-(-1)^2) \\ 1^{i-1}(1-1^2) \end{pmatrix} = \mathbf{0}$
- $\mathcal{B}_{\text{Kern}}$ linear unabhängig: Seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{d-1} \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i p_i = 0.$$

Wir müssen zeigen, dass dann $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{d-1} = 0$ folgt. In der Monombasis erhalten wir das Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
-1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & -1 & 0 & \cdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & -1 & 0 & 1 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -1
\end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{d+1,d-1}}
\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Durch sukzessives Addieren der i-ten zur $i+2$-ten Zeile für $i = 1, \ldots, d-1$ erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{d-1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{d-1} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

und somit auch die einzige Lösung $\alpha_i = 0$ für $i = 1, \ldots, d-1$.

11.6f) Berechnen Sie für die Vektoren $t \mapsto t^n \in \mathcal{P}_d([-1,1])$, $n \in \{0,1,\dots,d\}$, die jeweiligen Orthogonalprojektionen auf $\mathcal{P}_2([-1,1])$.

Tipp: Verwenden Sie, dass sich die Orthogonalprojektion wegen dem Resultat aus Teilaufgabe 11.6b) einfach berechnen lässt.

Lösung: Aus 11.6b) wissen wir: $\tilde{\mathcal{B}} = \{P_0, P_1, P_2\}$ ist Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_2([-1,1])$. Somit ist die Orthogonalprojektion auf $\mathcal{P}_2([-1,1])$ für jedes $p \in \mathcal{P}_d([-1,1])$ gegeben durch

$$\mathsf{P}_{\mathcal{P}_2([-1,1])}(p) = \sum_{j=0}^{2} \langle p, P_j \rangle P_j, \qquad \text{also}$$
$$\mathsf{P}_{\mathcal{P}_2([-1,1])}(t \mapsto t^n) = \langle t \mapsto t^n, P_0 \rangle P_0 + \langle t \mapsto t^n, P_1 \rangle P_1 + \langle t \mapsto t^n, P_2 \rangle P_2 = (*).$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\langle t \mapsto t^n, P_0 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} t^n \,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{n+1} & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases} \\
\langle t \mapsto t^n, P_1 \rangle &= \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^{1} t^{n+1} \,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ \frac{\sqrt{6}}{n+2} & n \text{ ungerade} \end{cases} \\
\langle t \mapsto t^n, P_2 \rangle &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^{1} t^n (3t^2 - 1) \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^{1} 3t^{n+2} - t^n \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} \left(\frac{3}{n+3} t^{n+3} - \frac{1}{n+1} t^{n+1}\right)\Big|_{t=-1}^{1} \\
&= \begin{cases} \sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+1}\right) & n \text{ gerade} \\ 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
(*) &= \begin{cases} \frac{1}{n+1} + 0 + \frac{5}{4}\left(\frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+1}\right)(3t^2 - 1) & n \text{ gerade} \\ 0 + \frac{3}{n+2} t + 0 & n \text{ ungerade} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{9}{4(n+1)} + \frac{15}{4(n+3)} + \frac{15}{4}\left(\frac{3}{n+3} - \frac{1}{n+1}\right) t^2 & n \text{ gerade} \\ \frac{3}{n+2} t & n \text{ ungerade} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Veröffentlichung am 1. Dezember 2015.

Abzugeben bis 9. Dezember 2015.