P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 12

Aufgabe 12.1 Matrixpotenzen und Eigenwerte

Diese Aufgabe ist eine Vorbereitung auf Eigenwerte und Eigenvektoren und zeigt gleichzeitig eine mögliche Anwendung auf. Wir suchen eine einfache Methode um $\mathbf{A}^{100}\mathbf{x}$ zu berechnen für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

12.1a) Wenn $\mathbf{x}$ ein Vektor ist mit der Eigenschaft $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, was ist dann $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ für $k = 1, 2, \ldots$?

Wir suchen daher Paare $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Lösung: Wir berechnen

$$\begin{aligned}
k = 1: \quad & \mathbf{A}\mathbf{x} &&= \lambda\mathbf{x} \\
k = 2: \quad & \mathbf{A}^2\mathbf{x} &&= \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x} \\
k = 3: \quad & \mathbf{A}^3\mathbf{x} &&= \mathbf{A}(\lambda^2\mathbf{x}) = \lambda^3\mathbf{x} \\
& \vdots && \\
& \mathbf{A}^k\mathbf{x} &&= \lambda^k\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

12.1b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ für ein gegebenes λ ein homogenes, lineares Gleichungssystem darstellt. Wie sieht die zugehörige Koeffizientenmatrix aus?

Lösung: Die Gleichung $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ entspricht dem folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccc} 3x_1 & + & x_2 & = & \lambda x_1 \\ x_1 & + & 3x_2 & = & \lambda x_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} (3-\lambda)x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & (3-\lambda)x_2 & = & 0 \end{array}$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem (die rechte Seite ist null). Übrigens ist für den allgemeinen Fall $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ das entsprechende lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = 0,$$

welches auch ein homogenes Gleichungssystem ist.

12.1c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Determinante Werte von λ, für die $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ Lösungen $\mathbf{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat.

Lösung: Wir wissen, dass ein lineares Gleichungssystem genau dann eine eindeutige Lösung hat, wenn die Deteminante $\det \mathbf{A}$ ungleich null ist. Da $\mathbf{x} = 0$ immer eine Lösung von $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ ist, wäre es in diesem Fall die einzige Lösung.

Wenn nun $\det \mathbf{A} = 0$ gilt, so gibt es entweder unendlich viele Lösungen, oder gar keine. Da die rechte Seite in unserem Fall gleich null ist, muss die Verträglichkeitsbedingung immer erfüllt sein. Wir wissen dann also, dass es Lösungen von $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ gibt, für die $\mathbf{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist.

Also berechnen wir

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 \stackrel{!}{=} 0.$$

Durch Lösen der quadratischen Gleichung erhält man, dass $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ für $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 4$ Lösungen $\mathbf{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat.

Aufgabe 12.2 Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 5 & -6 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Allgemein ergeben sich die Eigenwerte λ_i einer $(n \times n)$-Matrix $\mathbf{M}$ als Lösungen der charakteristischen Gleichung $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}_n) = 0$ und die zugehörigen Eigenräume aus den Lösungen des homogenen Gleichungssystems $(\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I}_n)x = 0$.

Für die Matrix $\mathbf{A}$ ergibt sich

$$\det(\mathbf{A} - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 6 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) + 6 = (\lambda-1)(\lambda-2) \stackrel{!}{=} 0.$$

Damit erhalten wir als Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$, beide mit algebraischer Vielfachheit 1.

Nun berechnen wir den Eigenvektor zu λ_1, indem wir die Lösungsmenge von $(\mathbf{A} - \lambda_1)\mathbf{v}_1 = 0$ berechnen:

$$\begin{array}{|cc|c|} \hline 3 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|cc|c|} \hline 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Den Eigenvektor zu λ_2 berechnen wir auf die gleiche Art, indem wir die Lösungsmenge von $(\mathbf{A} - \lambda_2)\mathbf{v}_2 = 0$ bestimmen:

$$\begin{array}{|cc|c|} \hline 2 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ \hline \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{|cc|c|} \hline 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Also haben λ_1 und λ_2 jeweils geometrische Vielfachheit 1.

Für $\mathbf{B}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{B}-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 7-\lambda & -6 & 5 \\ 5 & -6-\lambda & 7 \\ 1 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (7-\lambda)\begin{vmatrix} -6-\lambda & 7 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -6 & 5 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -6 & 5 \\ -6-\lambda & 7 \end{vmatrix} \\ &= (7-\lambda)\big((\lambda+6)(\lambda-3)+14\big) - 30(\lambda-3) - 92 + 5(\lambda+6) \\ &= -\lambda^2(\lambda-4) \stackrel{!}{=} 0.\end{aligned}$$

Daher hat $\mathbf{B}$ die Eigenwerte $\lambda_1 = 4$ mit algebraischer Vielfachheit 1 und $\lambda_2 = 0$ mit algebraischer Vielfachheit 2.

Nun berechnen wir den Eigenvektor zu λ_1, indem wir $(\mathbf{B}-\lambda_1)\mathbf{v}_1 = 0$ lösen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -6 & 5 & 0 \\ 5 & -10 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -6 & 5 & 0 \\ 5 & -10 & 7 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_1 = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also hat der Eigenwert λ_1 die geometrische Vielfachheit 1.

Wir berechnen die Eigenvektoren zu λ_2, indem wir die Lösungsmenge von $(\mathbf{B}-\lambda_2)\mathbf{v}_2 = 0$ berechnen:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & -6 & 5 & 0 \\ 5 & -6 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & -6 & 7 & 0 \\ 7 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & -16 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \mathbf{v}_2 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also hat der Eigenwert λ_2 die geometrische Vielfachheit 1.

Aufgabe 12.3 Dimension des Eigenraums

Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}$ eine $(n \times n)$-Matrix, $a \neq 0$, $n \geq 2$.

12.3a) Zeigen Sie, dass $b-a$ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist.

Lösung: Wir benutzen, dass $b-a$ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist, wenn $\det(\mathbf{A}-(b-a)\mathbf{I}_n) = 0$ gilt:

$$\det(\mathbf{A}-(b-a)\mathbf{I}_n) = \det\begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a \end{pmatrix} = 0.$$

Da diese Matrix Rang 1 hat, ist die Determinante gleich null, und $b-a$ ist ein Eigenwert von $\mathbf{A}$.

12.3b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A} - (b-a)\mathbf{I}_n)$, d.h. die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert $b-a$.

Lösung: Wir benutzen, dass für eine $(n \times n)$-Matrix $\mathbf{B}$ das folgende gilt:

$$\dim(\mathrm{Kern}(\mathbf{B})) = n - \mathrm{Rang}(\mathbf{B}).$$

Wir wissen, dass der Rang von $\mathbf{A} - (b-a)\mathbf{I}_n$ gleich 1 ist, da alle Zeilen der Matrix identisch sind. Also hat der Kern der Matrix Dimension $n-1$, und somit hat auch der Eigenraum zum Eigenwert $b-a$ die Dimension $n-1$.

12.3c) Finden Sie einen Eigenvektor zu einem Eigenwert $\neq b-a$ von $\mathbf{A}$.

Tipp: Weil $\mathbf{A}$ symmetrisch ist, muss der gesuchte Eigenvektor senkrecht stehen auf allen Vektoren von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A} - (b-a)\mathbf{I}_n)$.

Lösung: Wir suchen einen Vektor, der senkrecht steht auf alle Vektoren $\mathbf{x}$ im Kern von $\mathbf{A} - (b-a)\mathbf{I}_n$. Über diese Vektoren wissen wir, dass $(\mathbf{A} - (b-a)\mathbf{I}_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Da alle Zeilen dieser Matrix identisch $(a, a, \ldots, a)$ enthalten, wissen wir also, dass $(a, a, ..., a)\mathbf{x} = 0$ für jeden Vektor $\mathbf{x} \in \mathrm{Kern}(\mathbf{A} - (b-a)\mathbf{I}_n)$. Folglich steht der Vektor $(1, 1, ..., 1)^\top$ senkrecht auf alle Vektoren im Kern von $\mathbf{A} - (b-a)\mathbf{I}_n$. Der entsprechende Eigenwert ist $b + (n-1)a$.

Aufgabe 12.4 Die Spur diagonalisierbarer Matrizen

In dieser Aufgabe lernen wir eine spezielle Funktion auf dem Raum der quadratischen Matrizen kennen, die *Spur*. Sie steht in enger Beziehung zum Spektrum einer Matrix.

Die Spur einer quadratischen Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist definiert als

$$\mathrm{Spur}\, \mathbf{M} := \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{M})_{j,j} \,. \tag{12.4.1}$$

12.4a) Bestimmen Sie die Dimension des Unterraums

$$\mathcal{U} := \{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n} \,:\, \mathrm{Spur}\, \mathbf{M} = 0\} \subset \mathbb{R}^{n,n} \,.$$

Tipp: Sie können $\mathcal{U}$ als Kern einer “Matrix” charakerisieren. Dann sieht man, dass diese Matrix nur ein Zeilenvektor ist.

Lösung: Wir schreiben die Matrix $\mathbf{M}$ als Vektor. Wir definieren für jede Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ den Vektor

$$\mathbf{v}_{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} (\mathbf{M})_{:,1} \\ (\mathbf{M})_{:,2} \\ \vdots \\ (\mathbf{M})_{:,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2} \,.$$

Für die Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1,n^2}$

$$\mathbf{A} := \begin{cases} 1 & j \in \{1,\, n+2,\, 2n+3,\, 3n+4,\, \ldots,\, n(n-2)+n-1,\, n^2\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

gilt

$$\operatorname{Spur}\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{v}_{\mathbf{M}}\,.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}\dim\mathcal{U} &= \dim\{\mathbf{M}\in\mathbb{R}^{n,n}\ :\ \operatorname{Spur}\mathbf{M}=0\}\\ &= \dim\{\mathbf{M}\in\mathbb{R}^{n,n}\ :\ \mathbf{A}\mathbf{v}_{\mathbf{M}}=0\} = \dim\operatorname{Kern}(\mathbf{A}) = n^2-1\,.\end{aligned}$$

12.4b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\operatorname{Spur}\mathbf{BC} = \operatorname{Spur}\mathbf{CB}\,,\quad \text{für alle Matrizen } \mathbf{B},\ \mathbf{C}\in\mathbb{R}^{n,n}\,. \tag{12.4.2}$$

Tipp: Einfach nachrechnen mit den Formeln für das Matrixprodukt. Es gibt hier keine Tricks!

Lösung:

$$\operatorname{Spur}(\mathbf{BC}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{jk}c_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}b_{jk} = \operatorname{Spur}(\mathbf{CB})\,,$$

wobei b_{ij} den ij Eintrag der Matrix $\mathbf{B}$ bezeichnet und c_{kj} den kj Eintrag von $\mathbf{C}$.

Bemerkung: Beachten Sie aber, dass im Allgemeinen $\operatorname{Spur}(\mathbf{ABC}) \neq \operatorname{Spur}(\mathbf{BAC})$! Als einfaches Gegenbeispiel betrachten Sie die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & 3\end{pmatrix},\quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}.$$

Explizites ausrechnen ergibt $\operatorname{Spur}(\mathbf{ABC}) = 35$ und $\operatorname{Spur}(\mathbf{BAC}) = 82$.

12.4c) Sei $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n,n}$ diagonalisierbar, mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\underbrace{\operatorname{diag}(\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_n)}_{=:\mathbf{D}}\mathbf{S}^{-1}\,, \tag{12.4.3}$$

wobei $\mathbf{S}\in\mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass gilt

$$\operatorname{Spur}\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,. \tag{12.4.4}$$

Bemerkung: Die Identität (12.4.4) bietet ein nützliches Hilfsmittel zur Überprüfung der Korrektheit von berechneten Eigenwerten.

Tipp: Sehr einfach wird die Aufgabe, wenn Sie das Resultat aus Teilaufgabe 12.4b) anwenden. Die Spur einer Diagonalmatrix sollte klar sein.

Lösung: Wir benutzen Teilaufgabe 12.4b) und die Zerlegung in (12.4.3).

$$\operatorname{Spur}\mathbf{A} \overset{(12.4.3)}{=} \operatorname{Spur}(\underbrace{\mathbf{SD}}_{=:\mathbf{B}}\underbrace{\mathbf{S}^{-1}}_{=:\mathbf{C}}) \overset{(12.4.2)}{=} \operatorname{Spur}(\underbrace{\mathbf{S}^{-1}\mathbf{S}}_{=\mathbf{I}_n}\mathbf{D}) = \operatorname{Spur}(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^{n}\lambda_j\,.$$

Aufgabe 12.5 Betrachtung zweier Spezieller Isometrien des $\mathbb{R}^2$

Gegenstand dieser Aufgabe sind spezielle Isometrien in der Ebene und ihre Matrixdarstellung.

Wir betrachten die folgenden 2×2-Matrizen

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_2 - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^\top \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{I}_2 - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top \; , \quad \mathbf{I}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

wobei $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ *Einheitsvektoren* sind, das heisst $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$. Diese Matrizen definieren zwei lineare Selbstabbildungen des $\mathbb{R}^2$, die mit F und G abgekürzt werden.

12.5a) Zeigen Sie, dass F und G Isometrien sind.

Lösung: Es genügt zu zeigen dass die jeweiligen Matrixdarstellungen orthogonale Matrizen sind. Wir haben

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\top\mathbf{A} &= (\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^\top)^\top(\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^\top) = (\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^\top)(\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^\top) = \mathbf{I}_2 - 4\mathbf{u}\mathbf{u}^\top + 4\mathbf{u}(\mathbf{u}^\top\mathbf{u})\mathbf{u}^\top \\ &= \mathbf{I}_2 - 4\mathbf{u}\mathbf{u}^\top + 4\mathbf{u}\|\mathbf{u}\|\mathbf{u}^\top = \mathbf{I}_2.\end{aligned}$$

Analoge Gleichungen gelten für $\mathbf{B}$. Folglich sind F und G Isometrien.

12.5b) Sowohl für F als auch für G gibt es jeweils einen eindimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^2$, dessen Vektoren von F bzw. G auf sich selbst abgebildet werden. Beschreiben Sie diese Unterräume durch jeweils eine Formel.

Lösung: Es genügt $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ zu finden, so dass $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{w}$. Für beliebiges $\mathbf{w}$ haben wir

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = (\mathbf{I}_2 - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^\top)\mathbf{w} = \mathbf{w} - 2\mathbf{u}(\mathbf{u}^\top\mathbf{w})$$

Folglich gilt für $\mathbf{w}$ einen Vektor mit $\mathbf{u}^\top\mathbf{w} = 0$ auch $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{w}$. Solche Vektoren existieren in der Tat, zum Beispiel $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ falls $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$, denn dann ist $\mathbf{u}^\top\mathbf{w} = 0$ und $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, da $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\|$. Weiter gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{w}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{w} = \alpha\mathbf{w}$. Also ist der Raum

$$\mathcal{U} = \text{Span}(\{\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\}),$$

wobei $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ein 1-dimensionaler Unterraum von $\mathbb{R}^2$ dessen Elemente von F auf sich selbst abgebildet werden. Dasselbe gilt für G.

12.5c) Geben Sie eine geometrische Interpretation von F und G in der Ebene und verdeutlichen Sie diese durch eine Skizze.

Lösung: Wir bemerken $\mathbf{A}\mathbf{u} = -\mathbf{u}$. Weiter wissen wir, dass für alle Vektoren, welche zu $\mathbf{u}$ orthogonal stehen, also alle Vektoren, so dass $\mathbf{w}^\top\mathbf{u} = 0$ gilt, dass $\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{w}$. Folglich sind F und G Spiegelungen an einer Gerade durch den Nullpunkt in Richtung $\mathbf{w}$.

12.5d) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung von F und G eine Drehung ist. Was ist der Drehwinkel?

Tipp: Überlegen Sie sich, dass wir die Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ als

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

schreiben können, da $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine Rotationsmatrix von der Form

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix},$$

ist für einen Winkel $\psi \in [0, 2\pi)$.

Lösung: Da $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$ liegen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ auf dem Einheitskreis. Folglich existieren $\phi, \theta \in [0, 2\pi]$, so dass

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen

$$\mathbf{u}\mathbf{u}^\top = \begin{pmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \cos\phi\sin\phi & \sin^2\phi \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in $\mathbf{A}$ und die Verwendung trigonometrischer Identitäten ergeben

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^\top = \begin{pmatrix} -\cos(2\phi) & -\sin(2\phi) \\ -\sin(2\phi) & \cos(2\phi) \end{pmatrix}.$$

Ein analoger Ausdruck gilt für $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^\top = \begin{pmatrix} -\cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ -\sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}.$$

Die Matrixdarstellung der Komposition beider Abbildungen ist nun durch das Produkt der jeweiligen Matrixdarstellungen gegeben, also erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta)\cos(2\phi) + \sin(2\theta)\sin(2\phi) & \cos(2\theta)\sin(2\phi) - \sin(2\theta)\cos(2\phi) \\ \cos(2\phi)\sin(2\theta) - \sin(2\phi)\cos(2\theta) & \cos(2\theta)\cos(2\phi) + \sin(2\theta)\sin(2\phi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta - 2\phi) & -\sin(2\theta - 2\phi) \\ \sin(2\theta - 2\phi) & \cos(2\theta - 2\phi) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

eine Rotationsmatrix um den Winkel $2(\theta - \phi)$.

12.5e) Geben Sie eine geometrische Deutung des Resultats der vorhergehenden Teilaufgabe.

Lösung: Da F und G beides Spiegelungen sind, ist die Komposition die Spiegelung um zwei Geraden in $\mathbb{R}^2$, was eine Rotation um zwei mal den Winkel, der zwischen den Geraden liegt, ergibt.

Aufgabe 12.6 Eigenwerte und Eigenvektoren

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig bzw. falsch sind für beliebige $(n \times n)$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$?

12.6a) Ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$, dann ist $\mathbf{x}$ auch ein Eigenvektor von $\mathbf{A}^2$.

$\surd$ (i) Richtig.

(ii) Falsch.

Es gilt

$$\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x},$$

also ist $\mathbf{x}$ auch Eigenvektor von $\mathbf{A}^2$.

12.6b) Ist λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$, dann ist λ auch ein Eigenwert von $\mathbf{A}^2$.

(i) Richtig.

$\surd$ (ii) Falsch.

Es gilt

$$\mathbf{A}^2\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \lambda^2\mathbf{x},$$

es ist also λ^2 Eigenwert von $\mathbf{A}^2$. Falls also $\lambda \notin \{0, 1\}$ und λ^2 auch sonst kein Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist, dann stimmt die Behauptung nicht. Ein konkretes Gegenbeispiel wäre die Diagonalmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

die die Eigenwerte 2 und 3 hat, während $\mathbf{A}^2$ die Eigenwerte 4 und 9 hat.

12.6c) Ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ und auch ein Eigenvektor von $\mathbf{B}$, dann ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

$\surd$ (i) Richtig.

(ii) Falsch.

Sei $\mathbf{Ax} = \lambda_A \mathbf{x}$ und $\mathbf{Bx} = \lambda_B \mathbf{x}$. Dann gilt

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bx} = \lambda_A \mathbf{x} + \lambda_B \mathbf{x} = (\lambda_A + \lambda_B)\mathbf{x},$$

also ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

12.6d) Ist λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ und auch ein Eigenwert von $\mathbf{B}$, dann ist λ ein Eigenwert von $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

(i) Richtig.

$\surd$ (ii) Falsch.

Sei $\mathbf{Ax_A} = \lambda \mathbf{x_A}$ und $\mathbf{Bx_B} = \lambda \mathbf{x_B}$. Da die Eigenvektoren im allgemeinen nicht identisch sind, funktioniert die Methode von oben nicht. Tatsächlich ist die Aussage falsch. Ein Gegenbeispiel ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beide Matrizen haben den Eigenwert 2, aber die Summe $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ hat Eigenwerte 5 und 3.

12.6e) Ist λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$, so ist $\lambda + 1$ ein Eigenwert von $\mathbf{A} + \mathbf{I}$.

$\surd$ (i) Richtig.

(ii) Falsch.

Die Aussage stimmt, denn

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + \mathbf{x} = (\lambda + 1)\mathbf{x}.$$

12.6f) Ist $\mathbf{A}$ eine diagonalisierbare Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, so gilt

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

√ (i) Richtig.

(ii) Falsch.

Da $\mathbf{A}$ diagonalisierbar ist, gibt es Matrizen $\mathbf{T}, \mathbf{D}$, so dass $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}$, wobei $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}) = \det(\mathbf{T}) \det(\mathbf{D}) \det(\mathbf{T}^{-1}) = \det(\mathbf{D}),$$

also stimmt die Aussage.

12.6g) Ist $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, dann hat $\mathbf{A} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^\top$ den Eigenvektor $\mathbf{u}$.

√ (i) Richtig.

(ii) Falsch.

Wir testen:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top)\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{u}^\top\mathbf{u}) = (\mathbf{u}^\top\mathbf{u})\mathbf{u},$$

also ist $\mathbf{u}$ ein Eigenvektor mit Eigenwert $\mathbf{u}^\top\mathbf{u}$.

12.6h) Die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ ändern sich nicht, wenn man 2 Zeilen von $\mathbf{A}$ vertauscht.

(i) Richtig.

√ (ii) Falsch.

Gegenbeispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\mathbf{A}$ hat Eigenwerte 1 und 4, während $\mathbf{A}'$ Eigenwerte -2 und 2 hat.

12.6i) Falls $\sigma(\mathbf{A}) = \{0\}$, dann ist $\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

(i) Richtig.

$\surd$ (ii) Falsch.

Gegenbeispiel:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Die obere Dreiecksmatrix $\mathbf{A}$ hat nur den Eigenwerte 0. Diese Matrix ist natürlich nicht diagonalisierbar.

12.6j) Falls $\mathbf{A}$ *symmetrisch* ist und noch gilt $\sigma(\mathbf{A}) = \{0\}$, dann ist $\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

$\surd$ (i) Richtig.

(ii) Falsch.

Jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. Für eine diagonalisierbare Matrix ist klar, dass sie verschwinden muss, wenn dies für alle ihre Eigenwerte gilt.

Veröffentlichung am 8. Dezember 2015.

Abzugeben bis 16. Dezember 2015.