P. Grohs
T. Welti
F. Weber

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 2

Aufgabe 2.1 Lineare Gleichungssysteme

Vorgegeben ist ein lineares Gleichungssystem in Matrixdarstellung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Diese soll dann in "Gleichungsform" übersetzt werden (mit Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$).

2.1a) Für $n = 3$ und das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} \quad , \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Lösung: Das lineare Gleichungssystem umgeschrieben in 3-Gleichungen lautet:

$$\begin{array}{ccccccc} ax_1 & + & bx_2 & & = & a \\ bx_1 & + & ax_2 & +bx_3 & = & b \\ & & bx_2 & +ax_3 & = & a \end{array}$$

2.1b) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{falls } i + j = n + 1 \ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Lösung: Die n-Gleichungen lauten:

$$\begin{array}{cccccc} & & & x_n & = & 1 \\ & & 2x_{n-1} & & = & 1 \\ & \iddots & & & = & \vdots \\ n\,x_1 & & & & = & 1 \end{array}$$

2.1c) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j, \text{ für } j = 1, \ldots, n \ , \\ -1 & \text{falls } j = i + 1, \text{ für } i = 1, \ldots, n-1 \ , \\ -1 & \text{falls } i = n \wedge j = 1 \text{ oder } i = 1 \wedge j = n \ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} .$$

Tipp: Der Operator $\wedge$ bezeichnet das logische Und.

Lösung: Die n-Gleichungen lauten:

$$\begin{array}{cccccccc}
2x_1 & -x_2 & & & & -x_n & = & 1 \\
 & 2x_2 & -x_3 & & & & = & 2 \\
 & & 2x_3 & -x_4 & & & = & 3 \\
 & & & \ddots & \ddots & & = & \vdots \\
 & & & & 2x_{n-1} & -x_n & = & n-1 \\
-x_1 & & & & & 2x_n & = & n
\end{array}$$

2.1d) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \text{ für } j = 1, \dots, n\ , \\ 1 & \text{falls } i = 1, \text{ für } j = 1, \dots, n\ , \\ 1 & \text{falls } j = n, \text{ für } i = 1, \dots, n\ , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad b_1 = 1\ , \quad b_j = 0 \quad \text{für } j > 1\ .$$

Lösung: Die n-Gleichungen lauten:

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & \dots & +x_n & = & 1 \\
 & x_2 & & & +x_n & = & 0 \\
 & & x_3 & & \vdots & = & \vdots \\
 & & & \ddots & +x_n & = & \\
 & & & & +x_n & = & 0
\end{array}$$

Aufgabe 2.2 Lineare Paranussgleichung

Systeme, die sich mit Hilfe von linearer Überlagerung modellieren lassen, führen oft auf lineare Gleichungssysteme. Ein ganz einfacher solcher Fall wird hier betrachtet.

Ein Händler liefert Nüsse an den Grosshändler Migros. Um die Nüsse *exakt* kostendeckend zu verkaufen, muss der Händler $c\,\mathrm{Fr/kg}$ verlangen. Die aktuelle Ladung enthält $100\,\mathrm{kg}$ Cashewnüsse und eine unbekannte Menge Paranüsse. Der Händler hat für $85\,\mathrm{kg}$ Cashewnüsse $681\,\mathrm{Fr}$ bezahlt. Der Kilopreis der Paranüsse war um 20% höher.

2.2a) Welche Werte für c sind möglich?

Lösung: Wir erhalten vom Text folgende Informationen:

- Preis der Cashewnüsse pro Kilogramm (Fr/kg): $c_{cashew} = \frac{681}{85}$.
- Preis der Paranüsse pro Kilogramm (Fr/kg): $c_{para} = 1.2\frac{681}{85} = \frac{4086}{425}$.
- Preis der Ladung pro Kilogramm (Fr/kg) (Parameter): $c \in \mathbb{R}_+$.
- Menge an Cashewnüssen in der Ladung (in kg): $x_{cashew} = 100$.
- Menge an Paranüssen in der Ladung (in kg) (Unbekannte): $x_{para} \in \mathbb{R}_+$.

- Gesamtladung des Händlers (in kg): $x = x_{cashew} + x_{para}$.

Da wir wissen, dass der Gesamtpreis sich aus den Anteilen der beiden Nüsse zusammensetzt, erhalten wir folgende lineare Gleichung für x_{para} (in Abhängigkeit vom Parameter c, also dem Preis der Ladung pro Kilogramm):

$$\begin{aligned} cx &= c_{para}x_{para} + c_{cashew}x_{cashew} \\ \Leftrightarrow c(x_{para} + x_{cashew}) &= c_{cashew}\left(\frac{6}{5}x_{para} + x_{cashew}\right) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Lösen wir die Gleichung nach dem Parameter c auf (das Teilen durch $(x_{para}+x_{cashew})$ ist möglich, da x_{para} per Definition immer positiv ist), erhalten wir:

$$c = c_{cashew}\frac{\frac{6}{5}x_{para} + x_{cashew}}{x_{para} + x_{cashew}} = c_{cashew}\left(1 + \frac{1}{5}\frac{x_{para}}{x_{para} + x_{cashew}}\right).$$

Somit gilt (da $x_{para} \in [0, \infty)$), dass $c \in \left[c_{cashew}, \frac{6}{5}c_{cashew}\right) = \left[\frac{681}{85}, \frac{4086}{425}\right)$.

2.2b) Berechnen Sie die Menge der Paranüsse in Abhängigkeit von c.

Lösung: Wir betrachten wieder Gleichung (2.2.1). Lösen wir diese nach x_{para} auf, erhalten wir:

$$\begin{aligned} (c - \frac{6}{5}c_{cashew})x_{para} &= x_{cashew}(c_{cashew} - c) \\ \Rightarrow x_{para} &= x_{cashew}\frac{c_{cashew} - c}{c - \frac{6}{5}c_{cashew}} = -x_{cashew}\frac{c - c_{cashew} + \frac{1}{5}c_{cashew} - \frac{1}{5}c_{cashew}}{c - \frac{6}{5}c_{cashew}} \\ &= x_{cashew}\left(\frac{c_{cashew}}{5(\frac{6}{5}c_{cashew} - c)} - 1\right) = 100\left(\frac{\frac{681}{85}}{\frac{4086}{85} - 5c} - 1\right) \\ &= 100\left(\frac{681}{4086 - 425c} - 1\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3 Lineares Gleichungssystem

In dieser Aufgabe soll die Technik der Umformung auf Zeilenstufenform verwendet werden, um die verschiedene Aussagen über die Lösbarkeit und Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems zu verifizieren oder zu widerlegen. Wiederholen Sie dazu zunächst den Abschnitt der Vorlesung über die Zeilenstufenform und die Gausselimination, falls Sie sich nicht mehr an Details erinnern.

Durch eine Folge von Zeilenumformungen transformiert ein Student ein lineares Gleichungssystem auf die Form

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \beta^2 - 1 \\ \beta + 1 \end{pmatrix}.$$

Die folgenden Aussagen beziehen sich auf das ursprüngliche lineare Gleichungssystem. Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an:

2.3a) Für $\alpha = 2$ und beliebiges β hat das System genau eine Lösung.

Lösung: Falsch. Für $\beta \neq -1$ hat das System keine Lösung, denn die letzte Zeile ist $0 = \beta + 1 \neq 0$: ein Widerspruch.

2.3b) Für $\alpha = 2$ und $\beta = -1$ hat das System genau eine Lösung.

Lösung: Falsch. Das System hat unendlich viele Lösungen, denn die letzte Zeile ist $0 = 0$; das ist immer wahr. Es bleiben 2 Gleichungen und 3 Unbekannte.

2.3c) Für $\alpha \neq 2$ und beliebiges β hat das System genau eine Lösung.

Lösung: Falsch. Für $\alpha = -1$ und zum Beispiel $\beta = 0$ hat das System keine Lösung, denn Zeile 2 lautet $0 = -1$: ein Widerspruch.

2.3d) Für $\beta = -1$ hat das System immer eine Lösung.

Lösung: Richtig. Zeilen 2 und 3 sind jeweils entweder $0 = 0$, dann gibt es unendlich viele Lösungen; oder ergeben $x_2 = 0$ bzw. $x_3 = 0$. In jedem Fall hat das System mindestens eine Lösung.

2.3e) Für $\alpha = 3$ ist $x_1 = \frac{1}{8}(\beta^2 + 3)$, $x_2 = \frac{1}{4}(\beta^2 - 1)$, $x_3 = \beta + 1$ die einzige Lösung des Systems.

Lösung: Falsch. Die richtige Lösung ist $x_1 = \frac{1}{8}(\beta^2 - 12\beta + 3)$, $x_2 = \frac{1}{4}(\beta^2 - 1)$, $x_3 = \beta + 1$.

2.3f) Für $\alpha = 2$ and $\beta = -1$ lässt sich die Lösungsmenge beschreiben durch

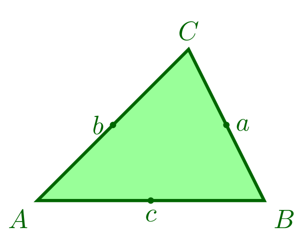
$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ (\mathbf{x})_1 = 2 - \frac{3}{2}t, \ (\mathbf{x})_2 = 0, \ (\mathbf{x})_3 = t, \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lösung: Richtig. Für x_3 gibt es kein Pivot, also ist $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Die zweite Zeile ergibt $x_2 = 0$, und die erste $2x_1 + 3t = 4$, also $x_1 = 2 - \frac{3}{2}t$.

Aufgabe 2.4 Lineares Gleichungssystem

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass lineare Gleichungssysteme in einer Vielzahl von mathematischen Modellen eine zentrale Rolle spielen. In dieser Aufgabe begegnet uns überraschenderweise ein lineares Gleichungssystem in einem geometrischen Zusammenhang.

Um die Eckpunkte eines allgemeinen Dreiecks ΔABC wird je ein Kreis gezeichnet, so dass sie sich paarweise in Punkten auf den Dreiecksseiten berühren.



Geben Sie die Kreisradien r_A, r_B und r_C in Abhängigkeit von den Längen der Dreiecksseiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ an.

Lösung: Wir stellen das lineare Gleichungssystem auf. Nach Konstruktion muss gelten:

$$\begin{aligned} r_A + r_B &= \overline{AB}\,, \\ r_B + r_C &= \overline{BC}\,, \\ r_A + r_C &= \overline{CA}\,. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Schreiben wir das Gleichungssystem in Matrixnotation, erhalten wir

$$(2.4.1) \leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix } \mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \end{pmatrix}}_{\text{Vektor der Unbekannten } \mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{AB} \\ \overline{BC} \\ \overline{CA} \end{pmatrix}}_{\text{Rechte-Seite-Vektor } \mathbf{b}} . \tag{2.4.2}$$

- *(Variante aus der Vorlesung mit Gaussalgorithmus):* Wir führen den Gaussalgorithmus durch

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{AB} \\ \overline{BC} \\ \overline{CA} \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\text{3.Zeile}\leftarrow\text{3.Zeile}-\text{1.Zeile}} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{AB} \\ \overline{BC} \\ \overline{CA} - \overline{AB} \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\text{1.Zeile}\leftarrow\text{1.Zeile}-\text{2.Zeile}} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{AB} - \overline{BC} \\ \overline{BC} \\ \overline{CA} - \overline{AB} \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\text{3.Zeile}\leftarrow\text{3.Zeile}+\text{2.Zeile}} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{AB} - \overline{BC} \\ \overline{BC} \\ \overline{CA} - \overline{AB} + \overline{BC} \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\text{3.Zeile}\leftarrow\frac{1}{2}\text{3.Zeile}} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{AB} - \overline{BC} \\ \overline{BC} \\ \frac{\overline{CA} - \overline{AB} + \overline{BC}}{2} \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\text{1.Zeile}\leftarrow\text{1.Zeile}+\text{3.Zeile}} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CA}}{2} \\ \overline{BC} \\ \frac{\overline{CA} - \overline{AB} + \overline{BC}}{2} \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\text{2.Zeile}\leftarrow\text{2.Zeile}-\text{3.Zeile}} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\overline{AB} - \overline{BC} + \overline{CA}}{2} \\ \frac{\overline{BC} - \overline{CA} + \overline{AB}}{2} \\ \frac{\overline{CA} - \overline{AB} + \overline{BC}}{2} \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

- *Variante aus Stoffer/Nipp in zwei Schritten:*

Wir führen Zeilenumformungen durch, bis wir eine obere Dreiecksform erhalten

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r_A\\r_B\\r_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{AB}\\\overline{BC}\\\overline{CA}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{3.Zeile}\leftarrow\text{3.Zeile}-\text{1.Zeile}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r_A\\r_B\\r_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{AB}\\\overline{BC}\\\overline{CA}-\overline{AB}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{3.Zeile}\leftarrow\text{3.Zeile}+\text{2.Zeile}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r_A\\r_B\\r_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{AB}\\\overline{BC}\\\overline{CA}-\overline{AB}+\overline{BC}\end{pmatrix}$$

Rückeinsetzen ergibt somit

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r_A\\r_B\\r_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{AB}\\\overline{BC}\\\overline{CA}-\overline{AB}+\overline{BC}\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{3.Zeile}\leftarrow\frac{1}{2}\cdot\text{3.Zeile}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r_A\\r_B\\r_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{AB}\\\overline{BC}\\\frac{\overline{CA}-\overline{AB}+\overline{BC}}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2.Zeile}\leftarrow\text{2.Zeile}-\text{3.Zeile}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r_A\\r_B\\r_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{AB}\\\frac{\overline{BC}-\overline{CA}+\overline{AB}}{2}\\\frac{\overline{CA}-\overline{AB}+\overline{BC}}{2}\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{1.Zeile}\leftarrow\text{1.Zeile}-\text{2.Zeile}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}r_A\\r_B\\r_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\overline{AB}-\overline{BC}+\overline{CA}}{2}\\\frac{\overline{BC}-\overline{CA}+\overline{AB}}{2}\\\frac{\overline{CA}-\overline{AB}+\overline{BC}}{2}\end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems (2.4.1), bzw. die Kreisradien, lauten somit

$$\mathcal{L}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{\overline{AB}-\overline{BC}+\overline{CA}}{2}\\\frac{\overline{BC}-\overline{CA}+\overline{AB}}{2}\\\frac{\overline{CA}-\overline{AB}+\overline{BC}}{2}\end{pmatrix}\right\}.$$

Aufgabe 2.5 Lösungsmengen von Linearen Gleichungssystemen mit Parametern

In dieser Aufgabe sollen Sie die Transformation eines linearen Gleichungssystems auf Zeilenstufenform mit Hilfe des Gaussalgorithmus durchführen und anschliessend die Lösungsmenge bestimmen.

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{llll}ax_1 & +4x_2 & +5x_3 & =a\\x_1 & +ax_2 & -2x_3 & =1\\2x_1 & +2ax_2 & -a^2x_3 & =a\end{array}\tag{2.5.1}$$

2.5a) Geben Sie die Zeilenstufenform des linearen Gleichungssystems an.

Tipp: Führen Sie eventuell erforderliche Fallunterscheidungen durch!

Lösung: Zuerst schreiben das Gleichungssystem (2.5.1) in Matrixform

$$\begin{pmatrix} a & 4 & 5 \\ 1 & a & -2 \\ 2 & 2a & -a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a \end{pmatrix}. \tag{2.5.2}$$

Als nächstes führen wir den Gaussalgorithmus durch. Da es sein kann, dass $a = 0$ gilt, vertauschen wir als erstes die 1.Zeile mit der 2.Zeile.

$$\begin{aligned}
(2.5.2) &\xrightarrow{\text{1. Zeile}\leftrightarrow\text{2. Zeile}} \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ a & 4 & 5 \\ 2 & 2a & -a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\text{2. Zeile}\leftarrow\text{2. Zeile}-a\cdot\text{1. Zeile}} \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & 4-a^2 & 5+2a \\ 2 & 2a & -a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{\text{3. Zeile}\leftarrow\text{3. Zeile}-2\cdot\text{1. Zeile}} \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & 4-a^2 & 5+2a \\ 0 & 0 & 4-a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a-2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Nun müssen wir die erste Fallunterscheidung vornehmen, da für die Division durch $4 - a^2$ gelten muss, dass $4 - a^2 \neq 0$, also $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

i) $a \in \{-2, +2\}$, also $4 - a^2 = 0$.
   In diesem Fall erhalten wir durch Weiterführen der Gausselimination

$$\xrightarrow{\text{2. Zeile}\leftarrow\frac{1}{4-a^2}\cdot\text{2. Zeile}} \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & 0 & 5+2a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a-2 \end{pmatrix}.$$

   An diesem Punkt bemerken wir, dass für $a \in \{-2, 2\}$ $5 + 2a \neq 0$. Somit können wir bedenkenlos durch diesen Term teilen und mit dem Algorithmus fortfahren.

$$\xrightarrow{\text{2. Zeile}\leftarrow\frac{1}{5+2a}\cdot\text{2. Zeile}} \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{1. Zeile}\leftarrow\text{1. Zeile}+2\cdot\text{2. Zeile}} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a-2 \end{pmatrix} \tag{2.5.4}$$

   Somit sind wir fertig.

ii) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, also $4 - a^2 \neq 0$.
   In diesem Fall erhalten wir durch Weiterführen der Gausselimination

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 0 & 1 & \frac{5+2a}{4-a^2} \\ 0 & 0 & 4-a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a-2 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\text{1. Zeile}\leftarrow\text{1. Zeile}-a\cdot\text{2. Zeile}} &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{8+5a}{4-a^2} \\ 0 & 1 & \frac{5+2a}{4-a^2} \\ 0 & 0 & 4-a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a-2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{3. Zeile}\leftarrow\frac{1}{4-a^2}\cdot\text{3. Zeile}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{8+5a}{4-a^2} \\ 0 & 1 & \frac{5+2a}{4-a^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2+a} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{1. Zeile}\leftarrow\text{1. Zeile}+\frac{8+5a}{4-a^2}\cdot\text{3. Zeile}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5+2a}{4-a^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a(1+a)^2}{(2+a)^2(2-a)} \\ 0 \\ -\frac{1}{2+a} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2. Zeile}\leftarrow\text{2. Zeile}-\frac{5+2a}{4-a^2}\cdot\text{3. Zeile}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-a(1+a)^2}{(2+a)^2(2-a)} \\ \frac{5+2a}{(2+a)^2(2-a)} \\ -\frac{1}{2+a} \end{pmatrix}. \tag{2.5.5}$$

2.5b) Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie jeweils auch die Lösungsmenge von (2.5.1).

Lösung: Wir betrachten die verschiedenen Zeilenstufenformen (2.5.4) und (2.5.5) aus Teilaufgabe 2.5a).

i) Im Fall von ZSF (2.5.4), bzw. $a \in \{-2, 2\}$, erhalten wir nur zwei Pivotspalten, nämlich $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_3$). Aus der 3. Zeile erhalten wir

$$\text{3. Zeile} \leftrightarrow x_3 = 0\,.$$

Die 2. Zeile ergibt

$$0 = a - 2\,.$$

- Im Fall $a = 2$ gilt für die 2. Zeile $0 = a - 2 \Leftrightarrow 0 = 0$. Somit ist in diesem Fall die Gleichung, welche der 2. Zeile von (2.5.4) entspricht, immer erfüllt. Es gibt deshalb keine Bedingung an x_2. x_2 ist frei wählbar, $x_2 = \alpha \in \mathbb{R}$.
  Aus der 1. Zeile erhalten wir zuletzt die Bedingung an x_1:

$$\text{1. Zeile} \leftrightarrow x_1 + 2\alpha = 1 \leftrightarrow x_1 = 1 - 2\alpha\,.$$

  Somit erhalten wir in diesem Fall *unendlich viele Lösungen*

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1-2\alpha \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \;:\; \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Im Fall $a = -2$ gilt für die 2. Zeile

$$0 = a - 2 \Leftrightarrow 0 = -4\,.$$

  Somit ist in diesem Fall die Gleichung, welche der 2. Zeile von (2.5.4) entspricht, nie erfüllt. Es gibt deshalb keine Lösung, welche das Gleichungssystem erfüllt.

ii) Da die ZSF im Fall von (2.5.5) der Einheitsmatrix entspricht, gibt es in diesem Fall *genau eine Lösung*. Diese lautet $\mathcal{L}_{\{a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}\}} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{-a(1+a)^2}{(2+a)^2(2-a)} \\ \frac{5+2a}{(2+a)^2(2-a)} \\ -\frac{1}{2+a} \end{pmatrix} \right\}$.

Aufgabe 2.6 Lineares Gleichungssystem: Gestörtes zeitdiskretes Signal

Additive Überlagerung von örtlich benachbarten Pixeln bei der Übertragung eines Graustufenbildes führt zu Unschärfe des Bildes. Durch Lösung eines linearen Gleichungssystems kann das Bild rekonstruiert werden, eine Technik, die "Deblurring" genannt wird.

In dieser Aufgabe sehen wir Ähnliches in dem einfacheren Kontext der Übertragung eines zeitdiskreten Analogsignals.

Ein zeitdiskretes Analogsignal wird in Form von Lichtpulsen in ein Glasfaserkabel eingespeist. Dabei werden $n \in \mathbb{N}$ Lichtpulse jeweils gleichen Zeitabständen $\Delta t > 0$ von einer Laserdiode emittiert. Wir bezeichnen die Signalamplitude zum Zeitpunkt $(i-1)\Delta t$, $i \in \{1,\dots,n\}$ mit x_i. Beim Empfänger wird das Signal ebenfalls in gleichen Zeitabständen Δt durch eine Photodiode abgetastet. Das zum Zeitpunkt $(i-1)\Delta t$ empfangene Signal werde mit y_i bezeichnet, $i \in \{1,\dots,n\}$.

Infolge der frequenzabhängigen Dämpfung des Signals in der Glasfaser werden die scharfen Pulse aufgeweitet und überlagern sich schliesslich additiv, so dass auch die beiden vorhergehenden Pulse x_{i-1} und x_{i-2} schliesslich noch zu y_i beitragen und zwar gemäss der Formel

$$y_i = (1-\alpha)x_i + \frac{2}{3}\alpha x_{i-1} + \frac{1}{3}\alpha x_{i-2}\,, \tag{2.6.1}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und der Konvention, dass $x_i := 0$, sofern $i < 1$.

2.6a) Stellen Sie ein lineares Glechungssystem auf, das für gegebene y_i von den unbekannten Signalamplituden x_i erfüllt wird.

Lösung: Wir erhalten das lineare Gleichungssystem, indem wir Gleichung (2.6.1) für $i = 1,\dots,n$ aufschreiben:

$$\begin{array}{lllllllll}
\frac{1}{3}\alpha x_{-1} & +\frac{2}{3}\alpha x_0 & (1-\alpha)x_1 & & & & & & =y_1 \\
& +\frac{1}{3}\alpha x_0 & +\frac{2}{3}\alpha x_1 & +(1-\alpha)x_2 & & & & & =y_2 \\
& & +\frac{1}{3}\alpha x_1 & +\frac{2}{3}\alpha x_2 & +(1-\alpha)x_3 & & & & =y_3 \\
& & & & \vdots & & & & \\
& & & & & \frac{1}{3}\alpha x_{n-3} & +\frac{2}{3}\alpha x_{n-2} & +(1-\alpha)x_{n-1} & =y_{n-1} \\
& & & & & & \frac{1}{3}\alpha x_{n-2} & +\frac{2}{3}\alpha x_{n-1} \quad +(1-\alpha)x_n & =y_n
\end{array} \tag{2.6.2}$$

Benutzen wir die Konvention, dass $x_j := 0$, sofern $j < 1$ und schreiben (2.6.2) in Matrixschreibweise, dann erhalten wir

$$\begin{pmatrix}
(1-\alpha) & 0 & 0 & \dots & & & & 0 \\
\frac{2}{3}\alpha & (1-\alpha) & 0 & & & & & \vdots \\
\frac{1}{3}\alpha & \frac{2}{3}\alpha & (1-\alpha) & \ddots & & & & \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
& & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
0 & \dots & & 0 & \frac{1}{3}\alpha & \frac{2}{3}\alpha & (1-\alpha) & 0 \\
0 & \dots & & & 0 & \frac{1}{3}\alpha & \frac{2}{3}\alpha & (1-\alpha)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}. \tag{2.6.3}$$

2.6b) Für welche $\alpha \geq 0$ besitzt das LGS aus 2.6a) eine eindeutige Lösung?

Tipp: Um eindeutige Lösbarkeit festzustellen, reicht es in diesem Beispiel aus, wenn Sie nur die linke Seite des in Teilaufgabe 2.6a) erhaltenen LGS betrachten. Die linke Seite entspricht der Koeffizientenmatrix mal dem Vektor der Unbekannten.

Lösung: Das LGS (2.6.3) besitzt eine eindeutige Lösung, sofern die Zeilenstufenform (ZSF) genau n Pivotspalten besitzt. Dazu reicht es aus, den Gaussalgorithmus nur auf die Koeffizientenmatrix anzuwenden. Bereits für die erste Zeilenumformung benötigen wir bereits eine Fallunterscheidung:

i) Fall $1 - \alpha = 0 \leftrightarrow \alpha = 1$:

$$
(2.6.3) \leftrightarrow \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \dots & & & & 0 \\
\frac{2}{3} & 0 & 0 & & & & & \vdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \ddots & & & & \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
0 & \dots & & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\
0 & \dots & & & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0
\end{pmatrix}.
$$

Bereits hier können wir den Algorithmus abbrechen, da die erste Zeile ganz verschwindet wissen wir, dass die Koeffizientenmatrix maximal $n - 1$ Pivotspalten haben kann und wir somit in diesem Fall keine eindeutige Lösung erhalten.

ii) Fall $1 - \alpha \neq 0 \leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$
\xrightarrow{\text{1. Zeile}\leftarrow\frac{1}{1-\alpha}\text{1. Zeile}} (2.6.3)
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & & & & 0 \\
\frac{2}{3}\alpha & (1-\alpha) & 0 & & & & & \vdots \\
\frac{1}{3}\alpha & \frac{2}{3}\alpha & (1-\alpha) & \ddots & & & & \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
0 & \dots & & 0 & \frac{1}{3}\alpha & \frac{2}{3}\alpha & (1-\alpha) & 0 \\
0 & \dots & & & 0 & \frac{1}{3}\alpha & \frac{2}{3}\alpha & (1-\alpha)
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\text{2. Zeile}\leftarrow\text{2. Zeile}-\frac{2}{3}\alpha\cdot\text{1. Zeile},\quad \text{3. Zeile}\leftarrow\text{3. Zeile}-\frac{1}{3}\alpha\cdot\text{1. Zeile}}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & & & & 0 \\
0 & 1-\alpha & 0 & & & & & \vdots \\
0 & \frac{2}{3}\alpha & 1-\alpha & \ddots & & & & \\
0 & \frac{1}{3}\alpha & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\
0 & \dots & & 0 & \frac{1}{3}\alpha & \frac{2}{3}\alpha & 1-\alpha & 0 \\
0 & \dots & & & 0 & \frac{1}{3}\alpha & \frac{2}{3}\alpha & 1-\alpha
\end{pmatrix}.
$$

Durch wiederholtes Anwenden dieser drei Zeilenumformungen für die 2. Zeile bis (n-2). Zeile, bzw. für $k = 2, \dots, n-3$:

$$
\begin{aligned}
\text{k. Zeile} &\leftarrow \frac{1}{1-\alpha}\text{k. Zeile}\,, \\
\text{(k+1). Zeile} &\leftarrow \text{(k+1). Zeile} - \frac{2}{3}\alpha\cdot\text{k. Zeile}\,, \\
\text{(k+2). Zeile} &\leftarrow \text{(k+1). Zeile} - \frac{1}{3}\alpha\cdot\text{k. Zeile}\,,
\end{aligned}
$$

erhalten wir

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \dots & & & & 0 \\
0 & 1 & 0 & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 1 & \ddots & & & & \\
0 & & & \ddots & & & & \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \ddots & 1 & 0 & \\
0 & & & 0 & 0 & 0 & (1-\alpha) & 0 \\
0 & \dots & & & 0 & 0 & \frac{2}{3}\alpha & (1-\alpha)
\end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{\text{(n-1). Zeile}\leftarrow \frac{1}{1-\alpha}\cdot\text{(n-1). Zeile},\qquad \text{n. Zeile}\leftarrow \frac{1}{1-\alpha}(\text{n. Zeile}-\frac{2}{3}\alpha\cdot\text{(n-1). Zeile})}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & & & & 0 \\
0 & 1 & 0 & & & & & \vdots \\
0 & 0 & 1 & \ddots & & & & \\
0 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & \ddots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\
0 & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & \cdots & & & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.
$$

Somit haben wir die Identitätsmatrix des $\mathbb{R}^n$ mit n Pivotspalten erhalten. In dem Fall $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gibt es folglich eine eindeutige Lösung.

Um Ihnen zu verdeutlichen, dass es auch hier viele verschiedene Lösungswege gibt, finden Sie nachfolgend noch einen weiteren Lösungsvorschlag.

Wir beginnen bei Gleichung (2.6.2). Durch Vertauschen aller Zeilen, also $1 \leftrightarrow n,\ 2 \leftrightarrow (n-1)$, etc., erhalten wir

$$
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & & & 0 & \frac{1}{3}\alpha & \frac{2}{3}\alpha & (1-\alpha) \\
0 & \cdots & & 0 & \frac{1}{3}\alpha & \frac{2}{3}\alpha & (1-\alpha) & 0 \\
 & & & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \\
\vdots & & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & \\
0 & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & & & \\
\frac{1}{3}\alpha & \frac{2}{3}\alpha & (1-\alpha) & \iddots & & & & \\
\frac{2}{3}\alpha & (1-\alpha) & 0 & & & & & \vdots \\
(1-\alpha) & 0 & 0 & \cdots & & & & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}.
$$

Vertauschen wir nun alle Spalten in derselben Art und Weise, erhalten wir

$$
\begin{pmatrix}
(1-\alpha) & \frac{2}{3}\alpha & \frac{1}{3}\alpha & 0 & & & \cdots & 0 \\
0 & (1-\alpha) & \frac{2}{3}\alpha & \frac{1}{3}\alpha & 0 & & \cdots & 0 \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
 & & & & \ddots & (1-\alpha) & \frac{2}{3}\alpha & \frac{1}{3}\alpha \\
\vdots & & & & & 0 & (1-\alpha) & \frac{2}{3}\alpha \\
0 & & & & \cdots & 0 & 0 & (1-\alpha)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}. \qquad (2.6.4)
$$

Es folgt sofort, dass das LGS für $(1-\alpha) \neq 0$, also für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, n Pivotspalten besitzt und somit eindeutig lösbar ist.

2.6c) Berechne die Amplituden x_i für $n = 3$ in Abhängigkeit von α, $0 < \alpha < 1$.

Lösung: Bitte beachten Sie, dass es viele Möglichkeiten gibt, die Gausselimination durchzuführen. Natürlich kommt man mit dem Algorithmus aus der Vorlesung zu genau demselben Ergebnis.

Für $n = 3$ erhalten wir aus (2.6.4):

$$\begin{pmatrix} (1-\alpha) & \frac{2}{3}\alpha & \frac{1}{3}\alpha \\ 0 & (1-\alpha) & \frac{2}{3}\alpha \\ 0 & 0 & (1-\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix}. \tag{2.6.5}$$

Da $0 < \alpha < 1$ erhalten wir für (2.6.5) immer eine eindeutige Lösung. Rücksubstitution ergibt

$$\text{(2.6.5)} \xrightarrow{\text{3. Zeile}\leftarrow \frac{1}{1-\alpha}\cdot\text{3. Zeile}} \begin{pmatrix} (1-\alpha) & \frac{2}{3}\alpha & \frac{1}{3}\alpha \\ 0 & (1-\alpha) & \frac{2}{3}\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 \\ y_2 \\ \frac{y_1}{1-\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2. Zeile}\leftarrow \frac{1}{1-\alpha}(\text{2. Zeile}-\frac{2}{3}\alpha\cdot\text{3. Zeile})} \begin{pmatrix} (1-\alpha) & \frac{2}{3}\alpha & \frac{1}{3}\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 \\ \frac{3y_2(1-\alpha)-2\alpha y_1}{3(1-\alpha)^2} \\ \frac{y_1}{1-\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{1. Zeile}\leftarrow\text{1. Zeile}-\frac{1}{3}\alpha\cdot\text{3. Zeile}} \begin{pmatrix} (1-\alpha) & \frac{2}{3}\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3y_3(1-\alpha)-\alpha y_1}{3(1-\alpha)} \\ \frac{3y_2(1-\alpha)-2\alpha y_1}{3(1-\alpha)^2} \\ \frac{y_1}{1-\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{1. Zeile}\leftarrow \frac{1}{1-\alpha}(\text{1. Zeile}-\frac{2}{3}\alpha\cdot\text{2. Zeile})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(7\alpha-3)\alpha y_1-6(1-\alpha)\alpha y_2+9(1-\alpha)^2 y_3}{9(1-\alpha)^3} \\ \frac{3y_2(1-\alpha)-2\alpha y_1}{3(1-\alpha)^2} \\ \frac{y_1}{1-\alpha} \end{pmatrix}.$$

Somit lautet die Lösungsmenge $\mathcal{L}_{0<\alpha<1} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{y_1}{1-\alpha} \\ \frac{3y_2(1-\alpha)-2\alpha y_1}{3(1-\alpha)^2} \\ \frac{(7\alpha-3)\alpha y_1-6(1-\alpha)\alpha y_2+9(1-\alpha)^2 y_3}{9(1-\alpha)^3} \end{pmatrix} \right\}$.

Veröffentlichung am 29. September 2015.

Abzugeben bis 07. Oktober 2015.