P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 3

Aufgabe 3.1 Rang eines linearen Gleichungssystems

Bestimmen Sie – in Abhängigkeit vom Paramter $a \in \mathbb{R}$ – den Rang des folgenden Gleichungssystems mit Hilfe des Gauss-Algorithmus.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & & - & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 8x_3 & + & (a^2+3a)x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & - & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Lösung:

$$\begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 8 & a^2+3a & 0 \\ -2 & -1 & a & 1 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & a^2+3a-1 & 0 \\ 0 & 1 & 6+a & 3 & 0 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+3a-4 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+3a-4 & 0 \end{array}$$

Es gilt $a^2 + 3a - 4 = 0$, wenn

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad a = 1 \text{ oder } a = -4.$$

Der Rang des Gleichungssystems ist also 4, falls $1 + a \neq 0$ und $a^2 + 3a - 4 \neq 0$, das heisst, für $a \notin \{-4, -1, 1\}$. Falls $a \in \{-4, -1, 1\}$, ist der Rang des Gleichungssystems 3.

Aufgabe 3.2 Lineares Gleichungssystem: Flussnetzwerk

Flussnetzwerke sind Netzwerke von Rohren und Knoten, durch die Flüsse fliessen. In dieser Aufgabe betrachten wir das Flussnetzwerk in Abbildung 3.1, das ein System von Wasserleitungen beschreibt. Kanten entsprechen dabei Rohren, während Knoten durch die nummerierten Punkte abgebildet sind.

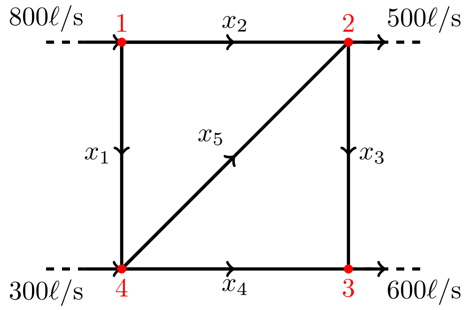

Abbildung 3.1: Schema des Flussnetzwerks

Knoten	Zufluss	Abfluss
1	800	$x_1 + x_2$
2	$x_2 + x_5$	$500 + x_3$
3	$x_3 + x_4$	600
4	$300 + x_1$	$x_4 + x_5$

Abbildung 3.2: Auflistung der Zu- und Abflüsse in jedem Knotenpunkt

Eine Gleichgewichtsbedingung an allen Knoten führt bei Flussnetzwerken auf ein lineares Gleichungssystem, das eine Beziehung zwischen allen Rohrflüssen herstellt. Diese Gleichgewichtsbedinung besagt, dass an jedem Knoten gleich viel Wasser zufliesst, wie abfliesst, und wird oft "Knotenregel" genannt. Wenn die $x_1, x_2, \ldots, x_5$ die Rohrflüsse durch die verschiedenen Kanten in Litern pro Sekunde angeben, besagt die Knotenregel also zum Beispiel beim Knoten 1, dass $x_1 + x_2 = 800$ gelten muss. Beachten Sie, dass Flüsse nur in die durch Pfeile angegebenen Richtungen fliessen können, da Rückschlagventile in die Rohre eingebaut sind (was bedeutet das für die Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_5$?).

3.2a) Stellen Sie das lineare Gleichungssystem für die Flüsse $x_1, x_2, \ldots, x_5$ auf, welches sich aus Abbildung 3.1 unter Berücksichtigung der Knotenregel ergibt.

3.2b) Geben Sie die Lösungsmenge des lineare Gleichungssystems aus Teilaufgabe 3.2a) mit Hilfe der Gausselimination an (d.h. durch Transformation auf Zeilenstufenform).

3.2c) Beschreiben Sie nun die möglichen Lösungen für die Rohrflüsse unter Berücksichtigung der Fliessrichtungen wie in Abbildung 3.1 angegeben.

Tipp: Aus Teilaufgabe 3.2b) haben Sie eine parametrisierte Darstellung der Lösungsmenge erhalten, für die Sie nun die Parameterbereiche geeignet einschränken müssen.

Lösung: Um das zu Abbildung 3.1 gehörige LGS zu finden, betrachten wir in jedem Knotenpunkt aus $\{1, 2, 3, 4\}$ (in der Abbildung rot gekennzeichnet) die Zu- und Abflüsse:

Aus Abbildung 3.2 resultiert das LGS

$$
\begin{array}{rrrrrl}
x_1 & +x_2 & & & & =800\,, \\
& x_2 & -x_3 & & +x_5 & =500\,, \\
& & x_3 & +x_4 & & =600\,, \\
-x_1 & & & +x_4 & +x_5 & =300\,,
\end{array}
\tag{3.2.1}
$$

indem wir alle unbekannten Flüsse x_i auf die linke Seite bringen und alle Zahlenwerte auf die rechte Seite schieben. Wir schreiben (3.2.1) in Matrixform und führen den Gaussalgorithmus durch. Seien Sie sich auch hier wieder bewusst, dass es viele verschiedene Möglichkeiten gibt, Zeilenumformungen anzuwenden, sodass man bei der ZSF endet. Nachfolgend finden Sie eine Version, welche der Technik aus dem Buch Stoffer/Nipp entspricht.

$$
\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\text{4. Zeile}\leftarrow\text{4. Zeile}+\text{1. Zeile}} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \\ 600 \\ 1100 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\text{4. Zeile}\leftarrow\text{4. Zeile}-\text{2. Zeile}} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\text{4. Zeile}\leftarrow\text{4. Zeile}-\text{3. Zeile}} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 500 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}
\tag{3.2.2}
$$

Durch Rücksubstitution erhalten wir weiter

$$
\begin{aligned}
(3.2.2) \xrightarrow{\text{2. Zeile}\leftarrow\text{2. Zeile}+\text{3. Zeile}} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 1100 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\xrightarrow{\text{1. Zeile}\leftarrow\text{1. Zeile}-\text{2. Zeile}} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -300 \\ 1100 \\ 600 \\ 0 \end{pmatrix} ,
\end{aligned}
$$

und somit die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -300 + t + s \\ 1100 - t - s \\ 600 - t \\ t \\ s \end{pmatrix} \; : \; t \in [0, 600], s \in [\max(300 - t, 0), (1100 - t)] \right\}, \tag{3.2.3}$$

wobei die Bedingungen an die Parameter s und t von der Annahme herrühren, dass die Flüsse nur in die angegebenen Richtungen fliessen können und folglich positiv sein müssen.

3.2d) Was ist der maximale Fluss in $4 \to 2$, wenn Sie annehmen, dass das Rohr $2 \to 3$ blockiert ist, also $x_3 = 0$?

Lösung: Wir setzen $x_3 = 0$ in (3.2.3) ein und erhalten

$$\mathcal{L} \cap \{x_3 = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 300 + s \\ 500 - s \\ 0 \\ 600 \\ s \end{pmatrix} \; : \; s \in [0, 500] \right\}. \tag{3.2.4}$$

Maximieren wir nun den Fluss ($4 \to 2$), was gleichbedeutend ist mit x_5, so erhalten wir aus (3.2.4), dass

$$\max_{s \in [0,500]} (x_5) = \max_{s \in [0,500]} (s) = 500\,.$$

In diesem Fall ($s = 500$) lauten die Flüsse

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \\ 0 \\ 600 \\ 500 \end{pmatrix}.$$

3.2e) Eine Messung hat ergeben, dass durch das Rohr $2 \to 3$ doppelt soviel Wasser pro Zeiteinheit fliesst wie durch das Rohr $4 \to 3$. Wir wissen also, dass gilt

$$x_3 = 2x_4\,. \tag{3.2.5}$$

Bestimmen Sie den maximalen Fluss x_5 durch das Rohr $4 \to 2$.

Lösung: Unter Verwendung von (3.2.3) erhalten wir für Gleichung (3.2.5)

$$600 - t = 2t \quad \Leftrightarrow \quad t = 200\,.$$

Somit gilt (wieder unter Verwendung von (3.2.3))

$$\mathcal{L} \cap \{x_3 = 2x_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} s - 100 \\ 900 - s \\ 400 \\ 200 \\ s \end{pmatrix} \; : \; s \in [100, 900] \right\}. \tag{3.2.6}$$

Den maximalen Fluss durch das Rohr $4 \to 2$ erhalten wir, indem wir x_5 in (3.2.6) maximal wählen:

$$\underset{x_5}{\operatorname{argmax}}(\mathcal{L} \cap \{x_3 = 2x_4\}) = \underset{x_5}{\operatorname{argmax}} \left\{ \begin{pmatrix} 800 \\ 0 \\ 400 \\ 200 \\ 900 \end{pmatrix} \right\} = 900\,.$$

Aufgabe 3.3 Welche Matrixprodukte sind definiert?

In der Vorlesung haben Sie die Multiplikation von Matrizen kennengelernt und insbesondere die Bedingungen, unter welchen diese definiert ist. Wir betrachten die folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Kreuzen Sie jeweils die zutreffende Aussage an.

3.3a) $\mathbf{AB}$ ist

√ (i) nicht definiert.

(ii) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

(iii) $= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

Lösung: Matrix $\mathbf{A}$ hat 2 Spalten und Matrix $\mathbf{B}$ hat 3 Zeilen, also ist diese Multiplikation nicht möglich.

3.3b) $\mathbf{BA}$ ist

(iv) nicht definiert.

√ (v) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

(vi) $= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -9 \end{pmatrix}$.

Lösung: Zwar ist $\mathbf{BA}$ definiert, aber die resultierende Matrix hat 3 Zeilen und 2 Spalten.

3.3c) $\mathbf{B}\mathbf{B}$ ist

$\surd$ (vii) nicht definiert.

(viii) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 16 & 0 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

(ix) $= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 16 & 0 \\ 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Lösung: Diese Multiplikation ist nicht definiert, denn $\mathbf{B}$ ist nicht quadratisch.

3.3d) $\mathbf{A}\mathbf{A}$ ist

(x) nicht definiert.

(xi) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

$\surd$ (xii) $= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

Lösung: Die angegebene Matrix ist gleich $\mathbf{A}^2$.

3.3e) $\mathbf{B}^\top\mathbf{B}$ ist

(xiii) nicht definiert.

$\surd$ (xiv) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 16 & -12 \\ -6 & -12 & 18 \end{pmatrix}$.

(xv) $= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 16 & -12 \\ -6 & -12 & 18 \end{pmatrix}$.

Lösung: $\mathbf{B}^\top\mathbf{B}$ ist definiert, aber schon die Dimension der gegebenen Matrix passt nicht. $\mathbf{B}^\top\mathbf{B}$ ist eine 2×2-Matrix.

3.3f) $\mathbf{B}\mathbf{B}^\top$ ist

(xvi) nicht definiert.

(xvii) definiert, aber $\neq \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 16 & -12 \\ -6 & -12 & 18 \end{pmatrix}$.

$\checkmark$ (xviii) $= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 16 & -12 \\ -6 & -12 & 18 \end{pmatrix}$.

Lösung: Die angegebene Matrix ist gleich $\mathbf{B}\mathbf{B}^\top$.

Aufgabe 3.4 Kommutierende Matrizen

Sie haben in der Vorlesung gesehen, dass die Matrixmultiplikation von zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ im allgemeinen nicht kommutativ ist, dass heisst, die Beziehung $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ gilt nicht. In dieser Aufgabe studieren wir aber Beispiele von Matrizen, deren Matrixprodukt kommutiert, da sie in einer besonderen Beziehung stehen.

Gegeben sind zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ der folgenden Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{C}\mathbf{D}_1\mathbf{C}, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{C}\mathbf{D}_2\mathbf{C}, \end{aligned} \qquad \text{wobei } \mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2 \in \mathbb{R}^{n,n} \textit{ diagonal} \text{ sind}$$

und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n,n}$ die Beziehung $\mathbf{C}^2 = \mathbf{I}_n$ erfüllt.

Zeigen Sie, dass $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= (\mathbf{C}\mathbf{D}_1\mathbf{C}) \cdot (\mathbf{C}\mathbf{D}_2\mathbf{C}) \\ &= (\mathbf{C}\mathbf{D}_1\mathbf{I}_n\mathbf{D}_2\mathbf{C}) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2\mathbf{C} \\ \mathbf{BA} &= (\mathbf{C}\mathbf{D}_2\mathbf{C}) \cdot (\mathbf{C}\mathbf{D}_1\mathbf{C}) \\ &= \mathbf{C}\mathbf{D}_2\mathbf{D}_1\mathbf{C} \end{aligned}$$

Da die Matrixmultiplikation von Diagonalmatrizen immer kommutativ ist, gilt somit $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Aufgabe 3.5 Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix

Gegeben sei die 2×2-Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

3.5a) Für welche $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{A}$ regulär?

Tipp: Überlegen Sie sich, wieso eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ genau dann regulär ist, wenn das Gleichungssystem $\mathbf{Mx} = 0$ *nur* die triviale Lösung $\mathbf{x} = 0$ hat, und verwenden Sie diese Tatsache.

Lösung: Für jede $n \times n$-Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ hat das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Mx} = 0$ *immer* die Lösung $\mathbf{x} = 0$. Wenn der Rang von $\mathbf{M}$ kleiner als n ist, ergeben sich ausserdem noch unendlich viele weitere Lösungen, weil es mindestens eine Spalte gibt, die keine Pivot-Spalte ist. Weil eine $n \times n$-Matrix genau dann regulär (= invertierbar) ist, wenn sie vollen Rang hat, folgt für jede $n \times n$-Matrix $\mathbf{M}$:

$$\text{das Gleichungssystem } \mathbf{Mx} = 0 \text{ hat nur die triviale Lösung } \Rightarrow \mathbf{M} \text{ ist regulär.}$$

Ausserdem haben Sie in der Vorlesung gesehen, dass jede $n \times n$-Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ genau dann regulär ist, wenn zu jedem $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Mx} = \mathbf{b}$ *genau eine* Lösung hat. Also gilt für jede $n \times n$–Matrix $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} \text{ ist regulär } \Rightarrow \text{ das Gleichungssystem } \mathbf{Mx} = 0 \text{ hat nur die triviale Lösung } \mathbf{x} = 0.$$

Zusammen bedeuten die obigen beiden Implikationen für jede $n \times n$-Matrix $\mathbf{M}$ folglich

$$\mathbf{M} \text{ ist regulär } \Leftrightarrow \text{ das Gleichungssystem } \mathbf{Mx} = 0 \text{ hat nur die triviale Lösung } \mathbf{x} = 0.$$

Also reicht es, die Lösungsmenge von $\mathbf{Ax} = 0$ zu betrachten. Wir verwenden den Gauss-Algorithmus:

<u>Fall $a \neq 0$:</u> Es gilt

$$\begin{array}{cc|c} x & y & 1 \\ \hline a & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cc|c} x & y & 1 \\ \hline a & b & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & 0 \end{array}$$

Dieses System hat Rang 1 genau dann, wenn $d - \frac{bc}{a} = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0$ gilt. Folglich ist die Matrix regulär genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

<u>Fall $a = 0$:</u> Es gilt

$$\begin{array}{cc|c} x & y & 1 \\ \hline 0 & b & 0 \\ c & d & 0 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cc|c} x & y & 1 \\ \hline c & d & 0 \\ 0 & b & 0 \end{array}$$

Dieses System hat Rang < 2 genau dann, wenn entweder b oder c Null ist, also wenn $bc = 0 \Leftrightarrow ad - bc = 0$ gilt. Folglich ist die Matrix regulär genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$ gilt.

3.5b) Bestimmen Sie für die in a) ermittelten Werte von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$.

Lösung: Sei $\mathbf{A}$ regulär, also $ad - bc \neq 0$. Damit wissen wir, dass die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A}$ existiert. Setze $\mathbf{X} := \mathbf{A}^{-1}$ und benutze die Notationen

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \end{pmatrix}, \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \end{pmatrix}, \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichung $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_2$ folgt, dass $\mathbf{Ax}^{(1)} = \mathbf{e}_1$ sowie $\mathbf{Ax}^{(2)} = \mathbf{e}_2$ gelten muss. Insofern entspricht $\mathbf{AX} = \mathbf{I}_2$ einem Gleichungssystem mit zwei rechten Seiten. Wir lösen es mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Fall $a \neq 0$: Es folgt

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right)$$

Für $\mathbf{Ax}^{(1)} = \mathbf{e}_1$ folgt:

$$\begin{cases} x_{21} = \frac{-\frac{c}{a}}{d - \frac{bc}{a}} = \frac{-c}{ad-bc}, \\ x_{11} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{bc}{ad-bc}\right) = \frac{d}{ad-bc}. \end{cases}$$

Für $\mathbf{Ax}^{(2)} = \mathbf{e}_2$ folgt:

$$\begin{cases} x_{22} = \frac{1}{d - \frac{bc}{a}} = \frac{a}{ad-bc}, \\ x_{12} = \frac{1}{a}\left(0 - \frac{ab}{ad-bc}\right) = \frac{-b}{ad-bc}. \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Genauso gut könnten wir hier den sogenannten Gauss-Jordan-Algorithmus zur Berechnung von $\mathbf{A}^{-1}$ durchführen: Dabei wird als rechte Seite die ganze Einheitsmatrix in das (vom Gauss-Algorithmus bekannte) Schema geschrieben und der Gauss-Algorithmus auf dieses erweiterte System angewendet, um das Gleichungssystem in Zeilenstufenform zu bringen (insbesondere werden beim Gauss-Jordan-Algorithmus also auch die Einträge oberhalb jeder 1 in den Pivotspalten durch Abziehen entsprechender Vielfache der Pivotzeilen eliminiert – die daraus resultierende Form wird in der Vorlesung Zeilenstufenform genannt). Im Falle einer invertierbaren Matrix steht danach auf der linken Seite die Einheitsmatrix, während auf der rechten Seite die Inverse abgelesen werden kann. In Aufgabe 4.1 der nächsten Serie, Serie 4, erhalten Sie ein weiteres Übungsbeispiel; hier ist der Gauss-Jordan-Algorithmus am Beispiel unserer allgemeinen 2×2-Matrix illustriert.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

Fall $a = 0$: Da $ad - bc \neq 0$ gilt, gilt $b \neq 0$ und $c \neq 0$. Es folgt

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c|c} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Für $\mathbf{Ax}^{(1)} = \mathbf{e}_1$ folgt:

$$\begin{cases} x_{21} = \frac{1}{b}\left(= \frac{-c}{ad-bc},\ \text{da } a = 0\right), \\ x_{11} = \frac{1}{c}\left(0 - \frac{d}{b}\right)\left(= \frac{d}{ad-bc}\right). \end{cases}$$

Für $\mathbf{A}\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{e}_2$ folgt:

$$\begin{cases} x_{22} = 0\big(= \frac{a}{ad-bc}\big), \\ x_{12} = \frac{1}{c}(1-0)\big(= \frac{-b}{ad-bc}\big). \end{cases}$$

Also gilt auch für $a = 0$:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{X} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Veröffentlichung am 06. Oktober 2015.

Abzugeben bis 14. Oktober 2015.