P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 4

Bemerkung: Für eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ sind die Potenzen $\mathbf{A}^k$ definiert durch das k-fache Matrixprodukt:

$$\mathbf{A}^k := \underbrace{\mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}}_{k \text{ Faktoren}} .$$

Aufgabe 4.1 Gauss-Jordan-Algorithmus

Für eine invertierbare Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$, erlaubt der Gauss-Jordan-Algorithmus die Berechnung ihrer Inverse $\mathbf{B}^{-1}$. Er funktioniert folgendermassen: Die gesamte Einheitsmatrix wird als rechte Seite in das (vom Gauss-Algorithmus bekannte) Schema geschrieben und der Gauss-Algorithmus auf dieses um n Spalten erweiterte System angewendet, um das Gleichungssystem in Zeilenstufenform zu bringen (insbesondere werden beim Gauss-Jordan-Algorithmus also auch die Einträge oberhalb jeder 1 in den Pivotspalten durch Abziehen entsprechender Vielfache der Pivotzeilen eliminiert – die daraus resultierende Form wird in der Vorlesung Zeilenstufenform genannt). Im Falle einer invertierbaren Matrix steht danach auf der linken Seite die Einheitsmatrix, während auf der rechten Seite die Inverse abgelesen werden kann.

Beachten Sie, dass sich mit dem Gauss-Jordan-Algorithmus nicht nur die Inverse berechnen lässt, sondern auch jedes beliebige andere lineare Gleichungssystem simultan für verschiedene rechten Seiten gelöst werden kann.

Für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir im Folgenden die 4×4-Matrix

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

4.1a) Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $\mathbf{A}(\alpha)$ invertierbar ist und berechnen Sie $[\mathbf{A}(\alpha)]^{-1}$ in Abhängigkeit von diesen α mithilfe des Gauss-Jordan-Algorithmus (Gauss-Algorithmus).

Tipp: Vertauschen Sie als erstes die erste und die vierte Zeile, um Rechenaufwand zu sparen.

Lösung: Wir sehen sofort, dass für $\alpha = 0$ die Matrix $\mathbf{A}(0)$ eine Nullzeile hat und damit nicht invertierbar sein kann. Sei daher im Folgenden $\alpha \neq 0$. Der Gauss-Jordan-Algorithmus ergibt dann

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{\alpha} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7\alpha} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{2}{7\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7\alpha} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{2}{7\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7\alpha} \end{array}\right)$$

Für jedes $\alpha \neq 0$ is die Inverse von $\mathbf{A}(\alpha)$ also gegeben durch

$$[\mathbf{A}(\alpha)]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7\alpha} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{9}{7} & -\frac{2}{7\alpha} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7\alpha} \end{pmatrix}.$$

4.1b) Sei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und sei α_0 so gewählt, dass $\mathbf{A}(\alpha_0)$ invertierbar ist und $\left([\mathbf{A}(\alpha_0)]^{-1}\right)_{4,4} = -3$ gilt. Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}(\alpha_0)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mithilfe von Teilaufgabe 4.1a). Wieso ist die Lösung eindeutig?

Lösung: Mithilfe von Teilaufgabe 4.1a) wissen wir, dass $\alpha_0 \neq 0$ und $\left([\mathbf{A}(\alpha_0)]^{-1}\right)_{4,4} = -\frac{3}{7\alpha_0} = -3$ gelten müssen. Damit ist $\alpha_0 = \frac{1}{7}$ und

$$[\mathbf{A}(\alpha_0)]^{-1} = \left[\mathbf{A}\left(\tfrac{1}{7}\right)\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 1 \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{9}{7} & -2 \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -3 \end{pmatrix}.$$

Weil die quadratische Matrix $\mathbf{A}\left(\frac{1}{7}\right)$ invertierbar ist, hat sie vollen Rang, was wiederum impliziert, dass das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\left(\frac{1}{7}\right)\mathbf{x} = \mathbf{c}$ für jedes $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^4$ genau eine Lösung hat (siehe

Vorlesung). Insbesondere hat dieses Gleichungssystem für die rechte Seite $\mathbf{b}$ genau eine Lösung. Dies lässt sich auch daran gut sehen, dass jede Lösung $\mathbf{x}$ des Gleichungssystems $\mathbf{A}\big(\frac{1}{7}\big)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ erfüllt, dass

$$\mathbf{A}\big(\tfrac{1}{7}\big)\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad\Leftrightarrow\quad \big[\mathbf{A}\big(\tfrac{1}{7}\big)\big]^{-1}\mathbf{A}\big(\tfrac{1}{7}\big)\mathbf{x} = \big[\mathbf{A}\big(\tfrac{1}{7}\big)\big]^{-1}\mathbf{b} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{x} = \big[\mathbf{A}\big(\tfrac{1}{7}\big)\big]^{-1}\mathbf{b},$$

also

$$\mathbf{x} = \big[\mathbf{A}\big(\tfrac{1}{7}\big)\big]^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 1 \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{9}{7} & -2 \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ \frac{2+4+1}{7} - 1 \\ \frac{-4+6-9}{7} + 2 \\ \frac{-6+2-3}{7} + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4.1c) Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\big(\frac{1}{7}\big)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mithilfe des Gauss-Algorithmus aus der Vorlesung, wobei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ in der vorigen Teilaufgabe 4.1b) gegeben ist.

Lösung: Es gilt

$$\mathbf{A}\big(\tfrac{1}{7}\big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden den Gauss-Algorithmus auf das erweiterte System $\big(\mathbf{A}\big(\frac{1}{7}\big) \,\big|\, \mathbf{b}\big)$ an. Um Rechenaufwand zu sparen, vertauschen wir wieder als erstes die erste und die letzte Zeile und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{3} & \frac{14}{3} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

Daraus folgt für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$, dass $x_4 = 2$, $x_3 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x_4 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = 1$, $x_2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x_4 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$ und $x_1 = -7$. Also ist die eindeutige Lösung gegeben durch

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

was konsistenterweise mit der in Teilaufgabe 4.1b) gefundenen Lösung übereinstimmt.

Aufgabe 4.2 Matrixpotenzen berechnen

Betrachten Sie eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ und die $n \times n$ Identitätsmatrix $\mathbf{I}_n$. Wir definieren die Matrix $\mathbf{A}_1$ durch $\mathbf{A}_1 := \mathbf{A} - \mathbf{I}_n$. $\mathbf{A}^k$ kann somit wie folgt berechnet werden:

$$\mathbf{A}^k = (\mathbf{I}_n + \mathbf{A}_1)^k = \mathbf{I}_n + \binom{k}{1}\mathbf{A}_1 + \binom{k}{2}\mathbf{A}_1^2 + \ldots + \binom{k}{k}\mathbf{A}_1^k. \tag{4.2.1}$$

Betrachten Sie nun den Spezialfall

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2a) Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt $\mathbf{A}_1^k = \mathbf{0}$ für $k \geq 3$.

Lösung: Wir haben

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} - \mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir

$$\mathbf{A}_1^2 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{A}_1^3 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich erhalten wir auch $\mathbf{A}_1^4 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^3 = \mathbf{A}_1\mathbf{0} = \mathbf{0}$, da $\mathbf{A}_1^3$ die Nullmatrix ist. Per Induktion folgt, dass $\mathbf{A}_1^k = \mathbf{0}$ für alle $k \geq 3$.

4.2b) Berechnen Sie $\mathbf{A}^{10}$, indem Sie Formel (4.2.1) verwenden.

Lösung: Da $\mathbf{A}_1^k = \mathbf{0}$ für $k \geq 3$, dann lässt sich in unserem Fall, $k = 10$ und $n = 3$, die Formel (4.2.1) auf

$$\mathbf{A}^{10} = (\mathbf{I}_3 + \mathbf{A}_1)^{10} = \mathbf{I}_3 + \binom{10}{1}\mathbf{A}_1 + \binom{10}{2}\mathbf{A}_1^2$$

reduzieren. Wir erhalten also

$$\mathbf{A}^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 10\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 45\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & 310 \\ 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

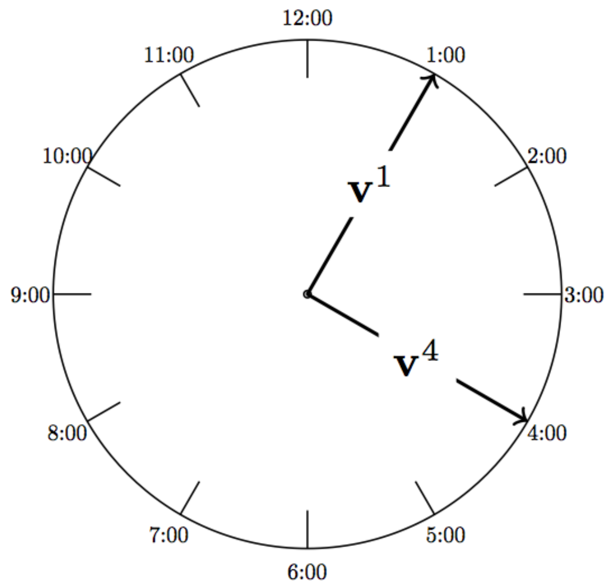

Abbildung 4.1: Skizze zu den Teilaufgaben 4.3a) - 4.3c)

Aufgabe 4.3 Vektoraddition: Ziffernblatt einer Uhr

Die Lage von Punkten in der Ebene kann durch Positionsvektoren $\in \mathbb{R}^2$ beschrieben werden, nachdem ein Koordinatensystem gewählt worden ist. Mit diesen Positionsvektoren lässt sich dann Vektorarithmetik betreiben wie in der Vorlesung eingeführt.

Im Nachfolgenden stellen wir das Ziffernblatt einer Uhr mithilfe der Einheitsscheibe (mit Radius 1 und Scheibenmittelpunkt im Ursprung $\mathbf{0} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$) dar.

4.3a) Was ist die Summe $\mathbf{s}$ der zwölf Vektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{12}$, welche vom Mittelpunkt der Uhr zu den Zeiten $1\!:\!00$ Uhr, $2\!:\!00$ Uhr, $\ldots$, $12\!:\!00$ Uhr zeigen?

Lösung: Es werden nachfolgend zwei verschiedene Lösungswege aufgezeigt.

- Als Erstes stellen wir fest, dass wir die Vektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{12}$ in Paare aufteilen können, welche in entgegengesetzte Richtungen zeigen (siehe auch Abbildung 4.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^1 &= -\mathbf{v}^7 \,, \\ \mathbf{v}^2 &= -\mathbf{v}^8 \,, \\ &\vdots \end{aligned}$$

  Im Allgemeinen gilt also

$$\mathbf{v}^i = -\mathbf{v}^{i+6} \,, \text{ für } i \in \{1, 2, \ldots, 6\} \,. \tag{4.3.1}$$

  Deshalb erhalten wir für die Summe $\mathbf{s}$

$$\sum_{i=1}^{12} \mathbf{v}^i = \sum_{i=1}^{6} \left(\mathbf{v}^i + \mathbf{v}^{i+6}\right) \overset{(4.3.1)}{=} \mathbf{0} \,.$$

- Die Vektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{12}$ liegen alle auf dem Einheitskreis und unterteilen diesen in Sektoren von gleichem Winkel $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$. Somit können wir die Vektoren über Sinus- und Cosinusfunktionen einfach darstellen als

$$\mathbf{v}^i = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i2\pi}{12}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i2\pi}{12}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{6}\right) \end{pmatrix}, \tag{4.3.2}$$

für $i = 1, \ldots, 12$. Durch Verwendung der Identitäten $\cos(x - \pi) = -\cos(x)$ und $\sin(x - \pi) = -\sin(x)$, erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{i+6} + \mathbf{v}^i &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{(i+6)\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{(i+6)\pi}{6}\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{6}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{6} - \pi\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{6} - \pi\right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{6}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{6}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}\,. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir dasselbe Resultat wie im ersten Lösungsvorschlag:

$$\sum_{i=1}^{12} \mathbf{v}^i = \mathbf{0}\,.$$

4.3b) Bestimmen Sie die Summe der verbleibenden elf Vektoren, wenn der Vektor $\mathbf{v}^4$, welcher zu $4\!:\!00$ Uhr zeigt, aus der Menge $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{12}\}$ entfernt wird.

Lösung: Wir erhalten

$$\sum_{i=1, i\neq 4}^{12} \mathbf{v}^i = \left(\sum_{i=1}^{12} \mathbf{v}^i\right) - \mathbf{v}^4 \overset{\text{Teilaufgabe 4.3}a)}{=} \mathbf{0} - \mathbf{v}^4 = -\mathbf{v}^4 = \mathbf{v}^{10} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) \\ -\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{v}^4$ den Vektor bezeichnet, welcher nach $4\!:\!00$ Uhr zeigt.

4.3c) Nehmen Sie an, der Vektor $\mathbf{v}^1$, welcher zu $1:00$ Uhr zeigt, sei halbiert. Addieren Sie ihn zu den anderen elf Vektoren $\mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^{12}$.

Lösung: Wir erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{12} \mathbf{v}^i + \frac{1}{2}\mathbf{v}^1 &= \left(\sum_{i=1}^{12} \mathbf{v}^i\right) - \mathbf{v}^1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}^1 \overset{\text{Teilaufgabe 4.3}a)}{=} \mathbf{0} - \frac{\mathbf{v}^1}{2} = -\frac{\mathbf{v}^1}{2} \overset{(4.3.1)}{=} \frac{\mathbf{v}^7}{2} \\ &\overset{(4.3.2)}{=} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{6}\right) \\ \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{6}\right) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.3d) Nehmen Sie an, dass sich der Scheibenmittelpunkt nun in $\binom{0}{1}$ befindet. Wir definieren nun zwölf neue Vektoren $\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^{12}$ welche vom Ursprung $\mathbf{0} = \binom{0}{0}$ aus zu den Zeiten $1:00$ Uhr, $2\!:\!00$ Uhr, $\ldots$, $12\!:\!00$ Uhr zeigen. Bilden Sie die Summe $\widetilde{\mathrm{s}}$ der neuen Vektoren $\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^{12}$.

Lösung: Wir bemerken (siehe Abbildung 4.3), dass für alle $i = 1, \ldots, 12$ gilt

$$\mathbf{w}^i = \mathbf{v}^i + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.3.3}$$

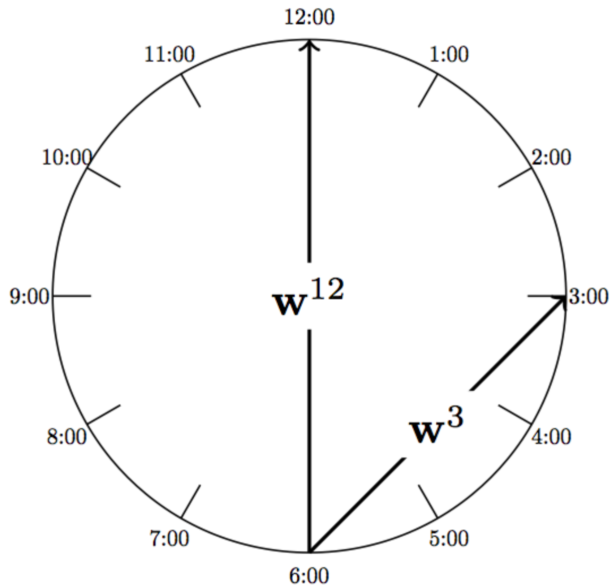

Abbildung 4.2: Skizze zur Teilaufgabe 4.3d)

Dies führt zu

$$\widetilde{\mathbf{s}} = \sum_{i=1}^{12} \mathbf{w}^i = \sum_{i=1}^{12} \left(\mathbf{v}^i + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 12 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{12} \mathbf{v}^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

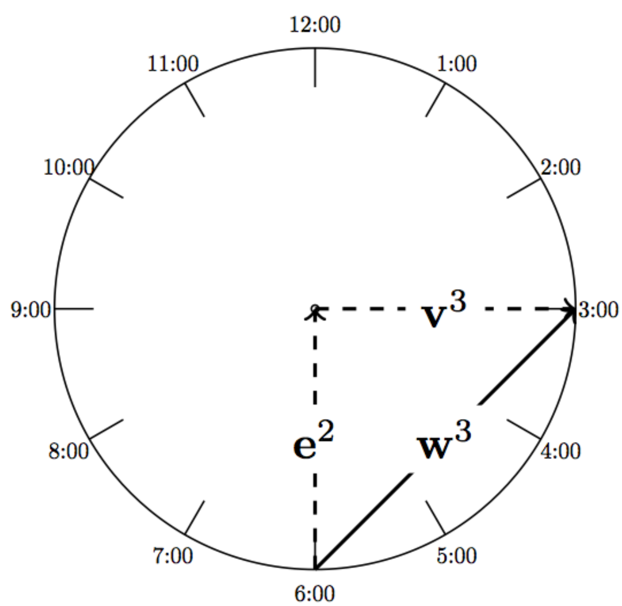

Abbildung 4.3: Skizze zu Gleichung (4.3.3)

Aufgabe 4.4 Matrixmultiplikation und Addition

In der Vorlesung haben wir das Matrixprodukt kennengelernt und gelernt, wie man Matrizen addiert und mit Skalaren (Zahlen) multipliziert. Das geschieht einfach komponentenweise, siehe Vorlesungsmitschrift.

Wichtige Einsichten waren, dass

1. das Matrixprodukt im Allgemeinen *nicht kommutiert*,
2. das Matrixprodukt mit den anderen Matrixoperationen im Sinn von Distributivgesetzen verträglich ist.

In dieser Aufgabe üben wir den Matrixkalkül mit Addition und Matrixmultiplikation. Gegeben sind dazu zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

4.4a) Vereinfachen Sie den Term $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 + (\mathbf{A}-\mathbf{B})^2$.

Lösung:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 + (\mathbf{A}-\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 - \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = 2\mathbf{A}^2 + 2\mathbf{B}^2$$

4.4b) Vereinfachen Sie den Ausdruck $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 - (\mathbf{A}-\mathbf{B})^2$.

Lösung:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 - (\mathbf{A}-\mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} - \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} = 2\mathbf{AB} + 2\mathbf{BA}$$

Aufgabe 4.5 Involutorische Matrix

Gegeben ist folgende Matrix aus $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 1+x \\ 1-x & -x \end{pmatrix}$$

4.5a) Berechnen Sie $\mathbf{A}^2$.

Lösung:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} x^2 + (1+x)(1-x) & (1+x)x - x(1+x) \\ x(1-x) - x(1-x) & (1-x)(1+x) + x^2 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2$$

4.5b) Berechnen Sie $\mathbf{A}^{-1}$.

Tipp: Natürlich können Sie das Ergebnis von Teilaufgabe 4.5a) verwenden!:D

Lösung: Aus Teilaugabe 4.5a) folgt, dass $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}_2 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1}$.

Somit ist $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$.

Veröffentlichung am 13. Oktober 2015.

Abzugeben bis 21. Oktober 2015.