P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 5

Aufgabe 5.1 Kommutierende Matrizen

In der Vorlesung und vergangenen Übungen wurde folgende wichtige Tatsache klar:

$$\boxed{\text{Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ!}}$$

Präziser ausgedrückt heisst das, dass es Paare von Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ kompatibler Grösse gibt, für die $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Das schliesst natürlich nicht aus, dass für *spezielle Matrizen* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Das gilt offensichtlich für alle *Diagonalmatrizen*.

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit einem Paar parametrisierter Matrizen und versuchen die Parameter so zu bestimmen, dass die Matrizen kommutieren. Konkret betrachten wir

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & \alpha & 9 \\ -4 & \alpha & 4 \\ \beta & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -5 \\ 3 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.1.1}$$

5.1a) Berechnen Sie die Matrixprodukte $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 3\alpha - 21 & 22 - 4\alpha & 25 - 3\alpha \\ 3\alpha - 20 & 24 - 4\alpha & 20 - 3\alpha \\ 6\beta - 3 & 2 - 8\beta & 6 - 5\beta \end{pmatrix}, \\ \mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} 2 - 5\beta & 10 - 2\alpha & 7 \\ 1 - 3\beta & 6 - \alpha & 2 \\ 3 & -\alpha & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

5.1b) Bestimmen Sie alle möglichen Werte der Parameter α und β so, dass $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Tipp: Aus $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ erhalten Sie durch komponentenweisen Abgleich ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten α und β.

Lösung: Komponentenweises Gleichsetzen von $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ aus (5.1.2) ergibt ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 3 & 3 \\ -3 & 0 \\ -3 & 0 \\ 0 & 6 \\ 1 & -8 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ -12 \\ 18 \\ 21 \\ -18 \\ -18 \\ 6 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Wir benützen Gausselimination um die Lösung zu finden. Zuerst vertauschen wir die erste mit der zweiten Zeile und normalisieren die erste Zeile, so dass der erste Eintrag 1 wird.

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & -12 \\ 3 & 5 & 23 \\ 3 & 0 & 18 \\ 3 & 3 & 21 \\ -3 & 0 & -18 \\ -3 & 0 & -18 \\ 0 & 6 & 6 \\ 1 & -8 & -2 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 23 \\ 3 & 0 & 18 \\ 3 & 3 & 21 \\ -3 & 0 & -18 \\ -3 & 0 & -18 \\ 0 & 6 & 6 \\ 1 & -8 & -2 \\ 0 & -5 & -5 \end{array}\right]$$

Nun vertauschen wir die letzte Zeile mit der zweiten und dividieren sie durch (-5):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & -5 & -5 \\ 3 & 0 & 18 \\ 3 & 3 & 21 \\ -3 & 0 & -18 \\ -3 & 0 & -18 \\ 0 & 6 & 6 \\ 1 & -8 & -2 \\ 3 & 5 & 23 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 18 \\ 3 & 3 & 21 \\ -3 & 0 & -18 \\ -3 & 0 & -18 \\ 0 & 6 & 6 \\ 1 & -8 & -2 \\ 3 & 5 & 23 \end{array}\right]$$

Wir subtrahieren geeignete Vielfache der ersten Zeile von Zeilen 3 bis 9, so dass die ersten Einträge der jeweiligen Zeilen verschwinden und tun dasselbe dann mit der zweiten Zeile, um die anderen Einträge zum verschwinden zu bringen:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Wir finden $\alpha = 6, \beta = 1$.

Aufgabe 5.2 Distributivgesetze für Matrixmultiplikation

Sei $\mathbf{I} := \mathbf{I}_4$ die 4×4–Einheitsmatrix und

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Seien $\mathbf{A} := \alpha_1 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{J}$ und $\mathbf{B} := \beta_1 \mathbf{I} + \beta_2 \mathbf{J}$.

5.2a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{AB}$ wieder von der Form $\gamma_1 \mathbf{I} + \gamma_2 \mathbf{J}$ ist mit gewissen Koeffizienten γ_1 und γ_2. Drücken Sie γ_1 und γ_2 aus mit Hilfe von $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$.

Tipp: Distributivgesetze für die Matrixmultiplikation anwenden.

Lösung: Zunächst bemerken wir, dass $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$ ist. (Vergleiche mit komplexen Zahlen!)

Durch Einsetzen und Ausmultiplizieren erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= (\alpha_1 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{J})(\beta_1 \mathbf{I} + \beta_2 \mathbf{J}) \\ &= \alpha_1 \beta_1 \mathbf{I}^2 + \alpha_1 \beta_2 \mathbf{IJ} + \alpha_2 \beta_1 \mathbf{JI} + \alpha_2 \beta_2 \mathbf{J}^2 \\ &= (\alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2) \mathbf{I} + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \mathbf{J}, \end{aligned}$$

also ist $\gamma_1 = \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2$ und $\gamma_2 = \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1$.

5.2b) Bestimmen Sie β_1, β_2 so, dass $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

Lösung: Um die Inverse zu erhalten, müssen wir β_1, β_2 so bestimmen, dass $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}$ gilt, d. h. so, dass $\gamma_1 = 1$ und $\gamma_2 = 0$. Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_1 \beta_1 - \alpha_2 \beta_2 &= 1 \\ \alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 &= 0, \end{aligned}$$

welches wir nach β_1, β_2 auflösen. Es treten folgende Fälle auf:

(i) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$: Das System hat keine Lösung (betrachte die erste Zeile).

(ii) $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 \neq 0$: Es existiert genau eine Lösung: $\beta_1 = 0, \beta_2 = -\frac{1}{\alpha_2}$.

(iii) $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 = 0$: Es existiert genau eine Lösung: $\beta_1 = \frac{1}{\alpha_1}, \beta_2 = 0$.

(iv) $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$: Es existiert genau eine Lösung, welche aus dem Gauss-Algorithmus folgt:

$$\left[\begin{array}{cc|c} \alpha_1 & -\alpha_2 & 1 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\mathrm{II} - \alpha_2/\alpha_1 \cdot \mathrm{I}} \left[\begin{array}{cc|c} \alpha_1 & -\alpha_2 & 1 \\ 0 & \alpha_1 + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} & -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \end{array}\right]$$

Somit ist $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$. Wir bemerken, dass diese Formel auch für die Fälle (ii) und (iii) jeweils die richtige Lösung liefert.

Zusammenfassend gibt es also zwei Fälle: Für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ist $\mathbf{A}$ die Nullmatrix, lässt sich also nicht invertieren. Für alle anderen Werte von α_1, α_2 ist die Matrix

$$\mathbf{B} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \mathbf{I} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \mathbf{J}$$

die Inverse von $\mathbf{A}$.

5.2c) Lösen Sie für $\alpha_1 = \frac{1}{5}$, $\alpha_2 = \frac{2}{5}$ das lineare Gleichungssystem

$$[\alpha_1 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{J}]x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Mit Hilfe der Formeln aus Teil 5.2b) erhalten wir als Inverse von $\mathbf{A} = \alpha_1 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{J}$ die Matrix

$$\mathbf{B} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \mathbf{I} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \mathbf{J} = \mathbf{I} - 2\mathbf{J}.$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt sich nun durch Anwenden von $\mathbf{B}$ auf die rechte Seite:

$$\mathbf{x} = \mathbf{B} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.3 Lineare Abhängigkeit der Spalten einer Matrix

In dieser Aufgabe untersuchen wir die lineare Abhängigkeit der Spaltenvektoren einer Matrix in Abhängigkeit von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

Geben Sie an, für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ die Spalten der im Folgenden gegebenen Matrizen linear abhängig sind.

5.3a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix},$$

Lösung: Nach der Definition von linearer Abhängigkeit suchen wir alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.3.1}$$

eine Lösung $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ besitzt. Da die erste Gleichung in (5.3.1) immer die Bedingung $\beta = 0$ liefert, ist dies nie der Fall.

Es gibt folglich *kein* $\alpha \in \mathbb{R}$, sodass die Spalten von $\mathbf{A}$ linear abhängig sind.

5.3b)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix},$$

Lösung: Da die Spalten von $\mathbf{B}$ eine Untermenge des $\mathbb{R}^2$ bilden, wissen wir, dass wir maximal zwei linear unabhängige Spalten finden können. Da wir aber drei Spaltenvektoren gegeben haben, sind diese folglich in jedem Fall linear abhängig. Wir können $\alpha \in \mathbb{R}$ frei wählen.

5.3c)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix},$$

Lösung: Nach der Definition von linearer Abhängigkeit suchen wir alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.3.2}$$

eine Lösung $\mathbf{b} := \left(\begin{smallmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ besitzt.

Wir betrachten das LGS nach der ersten Gaussumformung von (5.3.2).

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \alpha + \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten nur eine nichttriviale Lösung des LGS, sofern das zweite Pivot verschwindet, was gleichbedeutend ist zu $\alpha = -\frac{3}{2}$. Die Spalten von $\mathbf{C}$ sind folglich nur linear abhängig, wenn gilt $\alpha = -\frac{3}{2}$.

5.3d)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & -8 & -5 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Lösung: Wieder suchen wir alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & -8 & -5 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.3.3}$$

eine Lösung $\mathbf{b} := \left(\begin{smallmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ besitzt.

Durch Gaussumformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 7 & -14 \\ 0 & -3 & \alpha + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir erhalten nur eine nichttriviale Lösung des LGS, sofern das dritte Pivot verschwindet, was gleichbedeutend ist zu $\alpha = 3$. Die Spalten von $\mathbf{D}$ sind folglich nur linear abhängig, wenn gilt $\alpha = 3$.

Aufgabe 5.4 Matrizenrechnung

5.4a) Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} := \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Aus dieser möchten wir die zweite Zeile extrahieren. Das wollen wir tun, indem wir eine Matrix $\mathbf{B}$ finden, sodass entweder $\mathbf{BA} = (2, -5)$ oder $\mathbf{AB} = (2, -5)$. Für welche der folgenden Matrizen ist dies möglich?

(i) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Gibt eine 3×2 Matrix.

(ii) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Gibt eine 2×2 Matrix.

(iii) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Gibt eine 3×3 Matrix.

√ (iv) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Richtig.

(v) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Multiplikation von rechts nicht möglich.

5.4b) Wie oben beschrieben, möchten wir nun die erste Spalte der Matrix $\mathbf{A}$ extrahieren. Für welche der folgenden Möglichkeiten ist dies gegeben?

(vi) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Multiplikation von links nicht möglich.

(vii) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Gibt eine 3×2 Matrix.

(viii) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Gibt zweite Zeile von A.

(ix) Multiplikation von links mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Multiplikation von links nicht möglich.

√ (x) Multiplikation von rechts mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Richtig.

5.4c) Eine Permuationsmatrix ist eine Matrix, die bei Multiplikation mit einer anderen Matrix, deren Zeilen (Multiplikation von links) oder Spalten (Multiplikation von rechts) vertauscht. Welche der folgenden Permutationsmatrizen $\mathbf{P}$ führt $\mathbf{A}$ in $\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ über?

(xi) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Die Permutationsmatrix vertauscht die 2. mit der 3. Zeile.

√ (xii) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Richtig.

(xiii) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Die Permutationsmatrix setzt die 1. Zeile in die 3., die 2. Zeile in die 1. und die 3. Zeile in die 2. Zeile, also $\mathbf{PA} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

(xiv) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Die Permutationsmatrix vertauscht die 1. mit der 3. Zeile.

Aufgabe 5.5 Aussagen zum Kern

Die Konzepte der linearen Unabhängigkeit und des Kerns einer Matrix sind zentral in der linearen Algebra und werden in dieser Aufgabe geübt.

Sei eine invertierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben. Weiter betrachten wir die Menge von Vektoren $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ und beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

5.5a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Menge von Vektoren $\{\mathbf{Av}_1, \cdots, \mathbf{Av}_k\}$ ist linear unabhängig.

(ii) Die Menge von Vektoren $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ ist linear unabhängig.

Lösung: Wichtig für diese Aufgabe ist die Definition von linearer Unabhängigkeit. Die Menge $\{\mathbf{Av}_1, \cdots, \mathbf{Av}_k\}$ ist linear unabhängig, sofern gilt:

$$\lambda_1 \mathbf{Av}_1 + \lambda_2 \mathbf{Av}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{Av}_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0 \tag{5.5.1}$$

Da $\mathbf{A}$ invertierbar ist, können wir beide Seiten der Gleichung auf der linken Seite von (5.5.1) mit der Inversen $\mathbf{A}^{-1}$ multiplizieren:

$$A^{-1}(\lambda_1 \mathbf{Av}_1 + \lambda_2 \mathbf{Av}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{Av}_k) = A^{-1} \cdot 0 \tag{5.5.2}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k) = 0 \tag{5.5.3}$$

(5.5.3) ist identisch mit der Gleichung auf der rechten Seite von (5.5.1), damit ist die Aussage bewiesen.

5.5b) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,m}$ gilt:

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Kern}(\mathbf{B})\,.$$

Lösung: Per Definition gilt: $\mathrm{Kern}(\mathbf{B}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{Bx} = 0\}$, bzw.

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{AB}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{ABx} = 0\} \tag{5.5.4}$$

Wir formen (5.5.4) um, indem wir verwenden, dass $\mathbf{A}$ invertierbar ist, wir also beide Seiten der Gleichung $\mathbf{ABx} = 0$ in (5.5.4) mit $\mathbf{A}^{-1}$ multiplizieren können:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kern}(\mathbf{AB}) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{ABx} = 0\} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{A}^{-1}\mathbf{ABx} = \mathbf{A}^{-1}0\} \\
&= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \mathbf{Bx} = 0\} \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \mathrm{Kern}(\mathbf{B})
\end{aligned}$$

Veröffentlichung am 20. Oktober 2015.

Abzugeben bis 28. Oktober 2015.