P. Grohs
T. Welti
F. Weber



ETH Zürich
D-MATH

# Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

# Beispiellösung für Serie 6

## Aufgabe 6.1 Rechnen mit $3 \times 3$-Matrizen

In dieser kurzen Aufgabe geht es darum, dass Sie an einem einfachen Zahlenbeispiel die Matrixmultiplikation üben.

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A}+\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} . \tag{6.1.1}$$

Berechnen Sie den Ausdruck $(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I}) \in \mathbb{R}^{3,3}$.

**Lösung:** Aus (6.1.1) erhalten wir die Matrix $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} .$$

Wir rechnen weiter und erhalten das gesuchte Resultat

$$(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} -12 & -12 & 9 \\ -6 & -13 & -4 \\ 3 & -6 & -18 \end{pmatrix} .$$

## Aufgabe 6.2 Zerlegung einer Matrix in symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil

In der Vorlesung haben Sie bereits die Definition einer *symmetrischen* Matrix kennengelernt: Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ heisst symmetrisch, falls $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$. Analog heisst eine quadratische Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *schiefsymmetrisch*, falls $\mathbf{B} = -\mathbf{B}^\top$ gilt.

In dieser Aufgabe wollen wir Sie darauf aufmerksam machen, dass man jede beliebige Matrix in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Anteil aufteilen kann.

Für eine beliebige quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ definieren wir

$$\mathbf{S} := \frac{1}{2}\big(\mathbf{A}+\mathbf{A}^\top\big), \qquad \mathbf{K} := \frac{1}{2}\big(\mathbf{A}-\mathbf{A}^\top\big) \in \mathbb{R}^{n,n} . \tag{6.2.1}$$

**6.2a)** Zeigen Sie, dass $\mathbf{S}$ eine symmetrische Matrix ist.

**Lösung:** Per Definition müssen wir zeigen, dass $\mathbf{S} = \mathbf{S}^\top$ gilt. Wir berechnen

$$\mathbf{S}^\top \stackrel{\text{Def.}}{=} \left(\frac{1}{2}\big(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top\big)\right)^\top = \frac{1}{2}\big(\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}\big) = \mathbf{S}\,. \tag{6.2.2}$$

Somit ist $\mathbf{S}$ eine symmetrische Matrix.

**6.2b)** Zeigen Sie, dass $\mathbf{K}$ eine schiefsymmetrische Matrix ist.

**Lösung:** Per Definition müssen wir zeigen, dass $\mathbf{K} = -\mathbf{K}^\top$ gilt. Wegen

$$-\mathbf{K}^\top \stackrel{\text{Def.}}{=} -\left(\frac{1}{2}\big(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top\big)\right)^\top = -\frac{1}{2}\big(\mathbf{A}^\top - \mathbf{A}\big) = \frac{1}{2}\big(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top\big) = \mathbf{K} \tag{6.2.3}$$

ist $\mathbf{K}$ eine schiefsymmetrische Matrix.

**6.2c)** Zeigen Sie, dass $\mathbf{S} + \mathbf{K} = \mathbf{A}$ gilt.

**Lösung:** Es gilt

$$\mathbf{S} + \mathbf{K} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{1}{2}\big(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top\big) + \frac{1}{2}\big(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top\big) = \frac{1}{2}\big(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top + \mathbf{A} - \mathbf{A}^\top\big) = \frac{1}{2}(2\mathbf{A}) = \mathbf{A}\,.$$

## Aufgabe 6.3 Lineare Unabhängigkeit und Erzeugendensysteme

Bestimmen Sie in den folgenden vier Fällen mithile des Gaussverfahrens und durch Bestimmung des Rangs geeigneter Matrizen, ob die Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind und ob sie Erzeugendensysteme des $\mathbb{R}^3$, beziehungsweise des $\mathbb{R}^4$, bilden:

**6.3a)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

**Lösung:** Zunächst einmal untersuchen wir den allgemeinen Fall. Dazu betrachten wir $n$ Vektoren $\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ und setzen diese zur $m \times n$-Matrix $\mathbf{A} = \big(\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)}\big)$ zusammen. Aus der Vorlesung wissen wir, dass dann Folgendes gilt.

- Die Vektoren $\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ sind *erzeugend* im $\mathbb{R}^m$ (das heisst, ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^m$), falls das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ für jedes $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ gleich der Länge $m$ der Vektoren ist. Es gilt also

  $$\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)} \in \mathbb{R}^m \text{ erzeugend} \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{Rang} \mathbf{A} = m.$$

  Insebsondere sind sie genau dann nicht erzeugend, wenn der Rang von $\mathbf{A}$ kleiner als die Länge $m$ der Vektoren ist.

- Die Vektoren $\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)} \in \mathbb{R}^m$ sind *linear unabhängig*, falls das homogene lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ nur die triviale Lösung $\mathbf{x} = 0 \in \mathbb{R}^n$ besitzt. Das ist äquivalent dazu, dass der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ der Anzahl $n$ der Vektoren entspricht. Damit gilt

  $$\mathbf{a}^{(1)}, \ldots, \mathbf{a}^{(n)} \in \mathbb{R}^m \text{ linear unabhängig} \qquad \Leftrightarrow \qquad \operatorname{Rang} \mathbf{A} = n.$$

  Sie sind also genau dann linear abhängig, wenn der Rang von $\mathbf{A}$ kleiner als die Anzahl $n$ der Vektoren ist.

Nun kümmern wir uns um die $n = 2$ gegebenen Vektoren, für die $m = 3$ gilt. Das Gaussverfahren ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich ist $\operatorname{Rang} \mathbf{A} = r = 1$. Also sind die Vektoren linear abhängig (da $r < n$) und nicht erzeugend (da $r < m$). Bemerkung: Eine Familie von Vektoren, die den Nullvektor enthält, kann nie linear unabhängig sein.

**6.3b)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

**Lösung:** Hier ist $m = 4$ und $n = 3$. Das Gaussverfahren ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -5 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt $\operatorname{Rang} \mathbf{A} = r = 3$. Also sind die Vektoren linear unabhängig (da $r = n$), aber nicht erzeugend (da $r < m$).

**6.3c)** $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$

**Lösung:** Hier ist $m = 3$ und $n = 3$. Wir führen den Gaussalgorithmus durch und vertauschen als erstes die erste und die dritte Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -8 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass $\operatorname{Rang} \mathbf{A} = r = 3$. Also sind die Vektoren sowohl linear unabhängig (da $r = n$) als auch erzeugend (da $r = m$).

**6.3d)** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$

**Lösung:** Hier ist $m = 3$ und $n = 4$. Wir formen um

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Folglich ist $\operatorname{Rang} \mathbf{A} = r = 3$. Also sind die Vektoren linear abhängig (da $r < n$) und erzeugend (da $r = m$).

## Aufgabe 6.4 Auswahl einer Basis

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass eine Menge von erzeugenden und linear unabhängigen Vektoren eine Basis ist.

**6.4a)** Wählen Sie, falls möglich, mithilfe des Gaussverfahrens unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^3$ aus (mit Begründung). Gibt es mehrere Möglichkeiten?

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$$

**Lösung:** Eine Basis besteht aus erzeugenden und linear unabhängigen Vektoren. Es muss also $r = k = n = 3$ gelten (vergleiche mit voriger Aufgabe). Gausselimination ergibt

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Wir können also z. B. die Pivot-Vektoren als Basis wählen:

$$\left\{ \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix} \right\}.$$

Wir können aber statt des 4. Vektors $\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$ auch den 6. Vektor $\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$ nehmen, wie man durch Vertauschen der entsprechenden Spalten im Gaussschema leicht sieht. Ebenso können wir statt des 2. Vektors $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ den 5. Vektor $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ oder statt des 1. Vektors $\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ den 3. Vektor $\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}$ nehmen.

Als Basis könnte man auch eine andere Kombination wie z. B.

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

wählen, aber die Tatsache, dass diese Auswahl eine Basis bildet, sieht man anhand vom Schema nicht.

**6.4b)** Gegeben seien nun die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ 1+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ c \\ b+c \end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren spannen einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ auf. Wie hängt die Dimension dieses Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ ab?

**Lösung:** Sei $U$ der von den drei Vektoren aufgespannte Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Die Dimension von $U$ ist gleich der Anzahl Vektoren, die in $U$ eine Basis bilden. Schreibe nun

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ a & b & c \\ 1+a & 2 & b+c \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie, dass $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = U$ ist. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $d := \dim U = \mathrm{Rang}\, \mathbf{A}$. Somit können wir die Dimension von $U$ mithilfe des Gaussverfahrens berechnen.

$\underline{\text{Fall } a = b = 0}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & c \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & c \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- falls $c = 0$, gilt $d = r = 1$,
- falls $c \neq 0$, gilt $d = r = 2$.

$\underline{\text{Fall } a = 0,\, b \neq 0}$:

- für $\underline{c = 0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{also } d = r = 2,$$

- für $\underline{c \neq 0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b+c \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \text{also } d = r = 3.$$

Fall $a \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ a & b & c \\ 1+a & 2 & b+c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 2 & b-\frac{c}{a} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 0 & -c \\ 0 & 2 & b-\frac{c}{a} \\ 0 & 0 & \frac{b(c-ab)}{2a} \end{pmatrix}$$

- falls $\frac{b(c-ab)}{2a} = 0$ (also falls $b = 0$ oder $c = ab$): $d = r = 2$,
- falls $\frac{b(c-ab)}{2a} \neq 0$ (also falls $b \neq 0$ und $c \neq ab$): $d = r = 3$.

## Aufgabe 6.5 Kern und Bild

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Basen für $\operatorname{Kern}(\mathbf{A})$ und $\operatorname{Bild}(\mathbf{A})$.

**Lösung:** Aus der Vorlesung wissen wir, dass für eine $m \times n$-Matrix $\mathbf{C}$ gilt:

i) $\mathbf{b} \in \operatorname{Bild}(\mathbf{C}) \Leftrightarrow \mathbf{Cx} = \mathbf{b}$ besitzt mindestens eine Lösung $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

ii) $\mathbf{x} \in \operatorname{Kern}(\mathbf{C}) \Leftrightarrow \mathbf{x}$ löst $\mathbf{Cx} = \mathbf{0}$ .

iii) $\dim \operatorname{Bild}(\mathbf{C}) + \dim \operatorname{Kern}(\mathbf{C}) = r + (n-r) = n$, wobei $r = \operatorname{Rang} \mathbf{C}$.

iv) $\operatorname{Bild}(\mathbf{C}) = \operatorname{span}\{c^{(1)}, \dots, c^{(n)}\}$, wobei $c^{(i)}$ die $i$-te Spalte von $\mathbf{C}$ bezeichnet.

Löse also zunächst $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ mit Gausselimination:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Wähle } x_4 = \alpha \in \mathbb{R},\ x_3 = \beta \in \mathbb{R},$$

$$2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2}(x_4 - x_3) = \frac{3}{2}(\alpha - \beta),$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}(\beta - 3\alpha)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \alpha \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Somit ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$. Aus iii) folgt ausserdem, dass $\dim \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = 4 - \dim \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = 2$. Wegen iv) können wir also zwei linear unabhängige Spaltenvektoren von $\mathbf{A}$ als Basis von $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ wählen. Aus dem obigen Gauss-Schema sieht man, dass z.B.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Somit ist

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Basis von $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

## Aufgabe 6.6 Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis

Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)}\}$ für $\mathbb{R}^3$, wobei

$$\mathbf{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

**6.6a)** Betrachten Sie den Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Finden Sie die Koordinaten $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, die $\mathbf{x}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ beschreiben, d.h., so dass

$$\mathbf{x} = y_1\,\mathbf{b}^{(1)} + y_2\,\mathbf{b}^{(2)} + y_3\,\mathbf{b}^{(3)}.$$

**Lösung:** Wir suchen $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathbf{x} = y_1\,\mathbf{b}^{(1)} + y_2\,\mathbf{b}^{(2)} + y_3\,\mathbf{b}^{(3)}$, d.h.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} &= y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \mathbf{T}\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Löse $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$ mit Gauss:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(II)+(I)}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{(II)}\leftrightarrow\text{(III)}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Also folgt $y_3 = -1$, $y_2 = -2$ und $y_1 = 4$.

**6.6b)** Sei nun der Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ beschrieben durch die Koordinaten $(1, -2, 2)^\top$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie die Koordinaten von $\mathbf{v}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

**Lösung:** Sei $\mathbf{v}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ durch die Koordinaten $(1, -2, 2)^\top$ dargestellt. Es folgt:

$$\mathbf{v} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Diese Einträge sind genau die Koordinaten von $\mathbf{v}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$.

## Aufgabe 6.7 Koordinatentransformation

In der Vorlesung haben wir die Darstellung von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ als Koordinatenvektoren bezüglich einer Basis kennen gelernt. Diese Aufgabe übt den Umgang mit Basiswechselmatrizen anhand von anschaulichen Beispielen im $\mathbb{R}^3$.

Gegeben seien die zwei Basen $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ des $\mathbb{R}^3$:

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

**6.7a)** Finden Sie die Basiswechselmatrix $\mathbf{S}$, welche Koordinaten bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ auf die zugehörigen Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ abbildet.

**Tipp:** Erinnern Sie sich an die Tatsache, dass die Spalten der Basiswechselmatrix die Koordinaten der "alten Basis" $\tilde{\mathcal{B}}$ bezüglich der "neuen Basis" $\mathcal{B}$ enthalten. Hier müssen Sie lineare Gleichungssysteme lösen, um diese Koordinaten zu bestimmen.

**Lösung:** Wir definieren, die beiden Matrizen $\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}}$, in deren Spalten die Basisvektoren von $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ stehen.

Wir folgen der Definition der Basiswechselmatrix $\mathbf{S}$, in welcher $\mathbf{S}$ durch das Gleichungssystem

$$\tilde{\mathbf{b}}^j = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{S}_{i,j} \mathbf{b}^i \tag{6.7.1}$$

bestimmt ist. Wir schreiben (6.7.1) in Matrixnotation:

$$\mathbf{B}\mathbf{S} = \tilde{\mathbf{B}}. \tag{6.7.2}$$

In den Spalten von $\mathbf{S}$ stehen die Koordinaten der "alten Basis" $\tilde{\mathcal{B}}$ bezüglich der "neuen Basis" $\mathcal{B}$. Lösung von (6.7.2) durch Gausselimination liefert für die Basiswechselmatrix $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{13}{5} & \frac{12}{5} \\ 6 & \frac{43}{5} & \frac{32}{5} \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Koordinaten $\tilde{\mathbf{c}}$ bzgl. der "alten Basis" $\tilde{\mathcal{B}}$, werden durch Multiplikation mit $\mathbf{S}$ in Koordinaten $\mathbf{c}$ bzgl. der "neuen Basis" $\mathcal{B}$ überführt. Dies lässt sich durch folgende Rechnung leicht nachvollziehen: Multiplikation des Koordinatenvektors $\tilde{\mathbf{c}}$ von links mit (6.7.2) ergibt

$$\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{B}\mathbf{S}\tilde{\mathbf{c}}.$$

Da $\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{c}}$ und $\mathbf{B}\mathbf{c}$ denselben Punkt im $\mathbb{R}^3$ beschreiben sollen, gilt natürlich $\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{B}\mathbf{c}$. Somit muss $\mathbf{c} = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{c}}$ sein.

**6.7b)** Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

**Lösung:** Es gilt

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{B}}\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ sind gegeben durch $\mathbf{c} = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} \frac{31}{5} \\ -\frac{191}{5} \\ -18 \end{pmatrix}$.

Veröffentlichung am 27. Oktober 2015.

Abzugeben bis 4. November 2015.