P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 7

Aufgabe 7.1 Das Kreuzprodukt

In dieser Aufgabe lernen Sie das *Kreuzprodukt* (oft auch *äusseres Produkt* genannt) zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ kennen. Das Kreuzprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ liefert einen neuen Vektor im $\mathbb{R}^3$, dessen Richtung und Länge ganz spezielle Eigenschaften haben, die wir in der vorliegenden Aufgabe ergründen. Erinnern Sie sich aus der Vorlesung daran, dass zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *orthogonal* oder *senkrecht* genannt werden, wenn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ gilt, wobei $(\,) \cdot (\,) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Es seien für die folgenden zwei Teilaufgaben $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Das Kreuzprodukt von $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^\top$ ist definiert als der Vektor

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} := \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

7.1a) Bestimmen Sie eine Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3,3}$, so dass

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y}.$$

Lösung: Für

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y}.$$

7.1b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ senkrecht auf $\mathbf{x}$ und auf $\mathbf{y}$ steht.

Lösung: Zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt. Nachrechnen ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die Berechnung von $\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$ geht analog.

7.1c) Rechnen Sie eine der folgenden Identitäten für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ nach:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} && \text{(Grassmann)}\\
&\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0} && \text{(Jacobi)}\\
&(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) && \text{(Lagrange)}
\end{aligned}$$

Lösung: Grundsätzlich lassen sich alle drei Identitäten direkt mit den Definitionen von Skalar- und Kreuzprodukt nachrechnen. Die Grassmann-Identität rechnet man beispielsweise wie folgt nach: Für all $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3) \\ a_3(b_2c_3 - b_3c_2) - a_1(b_1c_2 - b_2c_1) \\ a_1(b_3c_1 - b_1c_3) - a_2(b_2c_3 - b_3c_2) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} b_1(a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} b_1(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_1(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_2(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \\ b_3(a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3) - c_3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \end{pmatrix}\\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}\\
&= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Grassmann-Identität kann man die Jacobi-Identität zudem sehr elegant herleiten: Für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned}
&\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\\
&= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}\\
&= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} + (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}\\
&= \mathbf{0},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt verwendet haben, dass das Skalarprodukt symmetrisch ist, das heisst, dass $\forall\, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

7.1d) Verwenden Sie die Lagrange-Identität aus der vorigen Teilaufgaben um zu zeigen, dass für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \sin\varphi$$

gilt, wobei $\varphi \in [0, \pi]$ der von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ eingeschlossene Winkel ist. Dieser Satz besagt, dass die Länge des Vektors $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ gleich der Fläche des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist.

Tipp: Es gilt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\| \cos\varphi$.

Lösung: Aus der Lagrange-Identität und dem Hinweis folgt

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|^2 &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\\ &= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|\cos(\varphi))^2\\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2(1-\cos(\varphi)^2)\\ &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\sin(\varphi)^2.\end{aligned}$$

Durch Wurzelziehen erhält man das gewünschte Resultat.

Bemerkung: Zusammengefasst stellen wir also fest, dass das Kreuzprodukt $\mathbf{x}\times\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3$ von zwei Vektoren $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^3$ auf $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ senkrecht steht und dass seine Länge genau dem Flächeninhalt des von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aufgespannten Parallelogramms entspricht.

Aufgabe 7.2 Rotationsmatrizen in $\mathbb{R}^2$

In dieser Aufgabe soll Ihnen aufgezeigt werden, dass Rotationen in zwei Dimensionen durch Matrizen beschrieben werden können (analog gilt das auch in drei oder beliebig vielen Dimensionen), genauer gesagt, durch *orthogonale* Matrizen.

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n,n}$ heisst *orthogonal*, wenn

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{7.2.1}$$

gilt. Eine orthogonale Matrix ist also eine Matrix mit der schönen Eigenschaft, dass ihre Inverse gerade ihrer Transponierten entspricht. Ausserdem ist eine Matrix genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten paarweise orthogonal aufeinander stehen und alle Länge 1 haben (dies folgt direkt, wenn man (7.2.1) ausschreibt). Analog gilt diese Aussage auch für ihre Zeilen.

Im folgenden verwenden wir für $\varphi\in[0,2\pi)$ die Notation

$$\mathbf{D}(\varphi) := \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2,2}$$

für eine Rotationsmatrix um den Winkel φ in der Ebene.

7.2a) Zeige, dass $\mathbf{D}(\varphi)$ für alle $\varphi\in[0,2\pi)$ orthogonal ist.

Tipp: Direkte Rechnung gemäss (7.2.1).

Lösung: Für alle $\varphi\in[0,2\pi)$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\varphi)^\top\mathbf{D}(\varphi) &= \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\cos^2\varphi+\sin^2\varphi & -\cos\varphi\sin\varphi+\cos\varphi\sin\varphi\\ -\sin\varphi\cos\varphi+\cos\varphi\sin\varphi & (-\sin\varphi)^2+\cos^2\varphi\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi = 1$.

7.2b) Zeige für beliebige $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$, dass die Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{x}$ tatsächlich den Winkel φ einschliessen.

Lösung: Wir wissen für alle $\mathbf{0} \neq \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$, dass

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \psi,$$

wobei $\psi \in [0, 2\pi)$ der von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ eingeschlossene Winkel ist. Also müssen wir lediglich zeigen, dass

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{x}\| \cos \varphi,$$

um unser Resultat zu erhalten, solange $\mathbf{x}$ und $\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{x}$ nicht gleich $\mathbf{0}$ sind. Aus der vorangegangenen Teilaufgabe wissen wir bereits, dass $\mathbf{D}(\varphi)$ orthogonal ist, und dementsprechend, dass für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{x}\|^2 &= (\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{x}) = (\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{x})^\top (\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{x}) \\
&= \mathbf{x}^\top \mathbf{D}(\varphi)^\top \mathbf{D}(\varphi)\mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2,
\end{aligned}$$

insbesondere ist $\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, falls $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Wir erhalten nun für alle $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, dass

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \cdot (\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{x}) &= x_1(\cos(\varphi)x_1 - \sin(\varphi)x_2) + x_2(\sin(\varphi)x_1 + \cos(\varphi)x_2) \\
&= \cos(\varphi)(x_1^2 + x_2^2) + \sin(\varphi)(-x_1x_2 + x_2x_1) \\
&= \cos(\varphi)\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{x}\| \cos \varphi,
\end{aligned}$$

wie verlangt.

7.2c) Zeige, dass die Hintereinanderausführung von Rotationen in der Ebene kommutiert, das heisst, dass

$$\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{D}(\psi) = \mathbf{D}(\psi)\mathbf{D}(\varphi) \quad \text{für beliebige Winkel } \varphi, \psi \in [0, 2\pi).$$

Tipp: Verwende geeignete trigonometrische Identitäten, wie man sie etwa auf `http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities` findet.

Lösung: Wir beweisen die Aussage $\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{D}(\psi) = \mathbf{D}(\varphi + \psi)$ für φ, ψ beliebig, aus der durch die Kommutativität der Addition auch $\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{D}(\psi) = \mathbf{D}(\psi)\mathbf{D}(\varphi)$ folgt.

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{D}(\psi) &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi & -[\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi] \\ \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) & -\sin(\psi + \varphi) \\ \sin(\varphi + \psi) & \cos(\varphi + \psi) \end{pmatrix} = \mathbf{D}(\varphi + \psi),
\end{aligned}$$

wobei im zweitletzten Schritt die trigonometrische Identitäten

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

verwendet wurden.

Aufgabe 7.3 Basis des Kerns

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,4}.$$

Bestimmen Sie den Kern der Matrizen und geben sie jeweils eine Basis des Kerns an.

Lösung: $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ ist definiert als die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$. Wir lösen also dieses Gleichungssystem mit dem Gauss-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

Also ist $x_3 = s \in \mathbb{R}$ beliebig, $x_2 = \frac{8s}{2} = 4s$ und $x_1 = -2 \cdot (4s) - 3s = -11s$. Damit haben wir

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \left\{ s \begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Eine Basis des Kerns von $\mathbf{A}$ ist dann trivialerweise

$$\begin{pmatrix} -11 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir gehen analog vor für $\mathbf{B}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow x_2 = 0, \; x_1 = 0.$$

Damit haben wir

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{B}) = \{\mathbf{0}\}.$$

und dieser Vektorraum hat keine Basis (siehe Vorlesung).

Für $\mathbf{C}$ erhalten wir mittels Gaussverfahren

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 8 & 6 & 16 & 0 \end{array}\right) \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Es folgt $x_4 = s \in \mathbb{R}$ beliebig, $x_3 = t \in \mathbb{R}$ beliebig, $x_2 = \frac{-4s}{2} = -2s$ und $x_1 = -4s - 2t - 2 \cdot (-2s) = -2t$. Die Lösungsmenge ist damit also

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{C}) = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von $\mathrm{Kern}(\mathbf{C})$: Es ist klar, dass sie erzeugend sind, da wir jeden Vektor in der Lösungsmenge als Linearkombination von diesen zwei Vektoren schreiben können. Ausserdem sind sie auch linear unabhängig, weil das Gleichungssystem (geschrieben als Schema)

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \to \quad \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

nur die triviale Lösung (das heisst, die Nulllösung) hat. Dies lässt sich einfach durch Rückwärtseinsetzen sehen. Alternativ stellt man fest, dass dieses System vollen Spaltenrang hat und die Spalten daher linear unabhängig sind (siehe zum Beispiel Aufgabe 6.3 der letzten Serie).

Aufgabe 7.4 Basis des Bildes

Gegeben seien dieselben Matrizen wie in Aufgabe 7.3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,4}.$$

7.4a) Geben Sie das Bild der Matrizen an und bestimmen Sie jeweils eine Basis des Bildes.

Lösung: Für eine allgemeine Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m,n}$ gilt, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(\mathbf{M}) &= \{\mathbf{Mx} \in \mathbb{R}^m \,|\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \left\{x_1 m^{(1)} + x_2 m^{(2)} + \ldots + x_n m^{(n)} \,\middle|\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{span}\{m^{(1)}, m^{(2)}, \ldots, m^{(n)}\}, \end{aligned}$$

wobei $m^{(i)}$ wie gewohnt die i-te Spalte von $\mathbf{M}$ bezeichnet.

Damit haben wir für die gegebenen Matrizen

$$\begin{aligned} \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) &= \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathrm{Bild}(\mathbf{B}) &= \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathrm{Bild}(\mathbf{C}) &= \mathrm{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Aus den Spaltenvektoren können wir wie in Aufgabe 6.5 der letzten Serie eine Basis bestimmen, indem wir den Gauss-Algorithmus anwenden und dann zum Beispiel die Pivotvektoren auswählen.

Der Gauss-Algorithmus führt zu

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} &\quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} &\quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{pmatrix} &\quad \to \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also sind bei allen gegebenen Matrizen die ersten zwei Spalten Pivotspalten. Daher ist $\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}\right\}$ eine Basis für $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$, $\mathrm{Bild}(\mathbf{B})$ sowie $\mathrm{Bild}(\mathbf{C})$ und weiter gilt

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{Bild}(\mathbf{B}) = \mathrm{Bild}(\mathbf{C}) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}\right\}.$$

Da wir hier zwei linear unabhängige Vektoren im $\mathbb{R}^2$ haben, bilden diese gemäss einem Lemma aus der Vorlesung eine Basis des $\mathbb{R}^2$ (insbesondere sind sie also erzeugend) und somit gilt

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{Bild}(\mathbf{B}) = \mathrm{Bild}(\mathbf{C}) = \mathbb{R}^2.$$

7.4b) Geben Sie jeweils für $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ die Dimension des Bildes und des Kerns an (verwenden Sie dafür Aufgabe 7.3). Überprüfen Sie dann, dass der Rangsatz aus der Vorlesung für die gegebenen Matrizen erfüllt ist, das heisst, dass für jede Matrix $\mathbf{M} \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$

$$\dim \mathrm{Kern}(\mathbf{M}) + \dim \mathrm{Bild}(\mathbf{M}) = n$$

gilt, wobei n die Anzahl Spalten von $\mathbf{M}$ bezeichnet.

Lösung: Die Dimension eines Vektorraums ist definiert als die Anzahl Vektoren in einer Basis dieses Vektorraums. Gemäss Teilaufgabe 7.4a) besteht eine und damit jede Basis von $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$, $\mathrm{Bild}(\mathbf{B})$ sowie $\mathrm{Bild}(\mathbf{C})$ jeweils aus zwei Vektoren. Daher gilt

$$\dim \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \dim \mathrm{Bild}(\mathbf{B}) = \dim \mathrm{Bild}(\mathbf{C}) = 2.$$

Gemäss Aufgabe 7.3 besteht eine Basis von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ aus einem Vektor und eine Basis von $\mathrm{Kern}(\mathbf{C})$ aus zwei Vektoren, also gilt

$$\dim \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = 1,$$
$$\dim \mathrm{Kern}(\mathbf{C}) = 2.$$

$\mathrm{Kern}(\mathbf{B})$ besteht nur aus dem Nullvektor und damit gilt per Definition

$$\dim \mathrm{Kern}(\mathbf{B}) = 0.$$

Die Spaltenanzahl n der jeweiligen Matrix ist drei für $\mathbf{A}$, zwei für $\mathbf{B}$ und vier für $\mathbf{C}$.

Zusammengefasst haben wir Folgendes:

$\mathbf{M}$	$\dim \mathrm{Kern}(\mathbf{M})$	$\dim \mathrm{Bild}(\mathbf{M})$	n
$\mathbf{A}$	1	2	3
$\mathbf{B}$	0	2	2
$\mathbf{C}$	2	2	4

Wir sehen also, dass für alle gegebenen Matrizen $\mathbf{M} \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$

$$\dim \mathrm{Kern}(\mathbf{M}) + \dim \mathrm{Bild}(\mathbf{M}) = n$$

gilt, wie der Rangsatz impliziert.

Aufgabe 7.5 Multiple Choice: Bild und Kern

Entscheiden Sie in den folgenden Teilaufgaben, welche der gegebenen Antworten richtig und welche falsch sind, und geben Sie jeweils eine Begründung an.

7.5a) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ so, dass $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung hat. Dann gilt:

$\surd$ (i) $\dim \operatorname{Bild}(\mathbf{A}) = n$

(ii) $\dim \operatorname{Bild}(\mathbf{A}) = 1$

$\surd$ (iii) $\dim \operatorname{Kern}(\mathbf{A}) = 0$

(iv) $\dim \operatorname{Kern}(\mathbf{A}) = 1$

Der Kern von $\mathbf{A}$ ist genau die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Da $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung hat, gilt $\dim \operatorname{Kern}(\mathbf{A}) = 0$. Weiter gilt nach der in der Vorlesung behandelten Rangformel

$$\dim \operatorname{Kern}(\mathbf{A}) + \dim \operatorname{Bild}(\mathbf{A}) = n.$$

Daher gilt $\dim \operatorname{Bild}(\mathbf{A}) = n$.

7.5b) Das Bild von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch die lineare Hülle der Vektoren ...

(i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

(iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(iv) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

√ (v) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

Wir bringen die gegebene Matrix $\mathbf{A}$ mit dem Gaussverfahren in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daher hat das Bild von $\mathbf{A}$ Dimension zwei und die beiden ersten Spalten $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

Somit ist die fünfte Antwort richtig und alle Vektoren im Bild von $\mathbf{A}$ sind von der Form

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_1 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

für $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind nicht von dieser Form (λ_1 müsste für beide Vektoren gleich 1 sein und es gibt kein passendes λ_2). Sie liegen daher nicht im Bild von $\mathbf{A}$ und die erste und vierte Antwort sind falsch.

Die zweite und dritte Antwort sind auch falsch, weil Vektoren im $\mathbb{R}^4$ nicht im Bild von $\mathbf{A}$ liegen können.

7.5c) Eine Basis des Kerns von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch ...

√ (i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

(iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(iv) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(v) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

Oben haben wir die gegebene Matrix $\mathbf{A}$ mit dem Gaussverfahren in die Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht. Daher sind die Lösungen des Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ durch

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_3 - 2x_4, \\ x_1 &= \frac{1}{2}((x_3 + 2x_4) + x_3 - 2x_4) = x_3 \end{aligned}$$

gegeben, wobei $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ freie Parameter sind. Der Kern von $\mathbf{A}$ hat somit die Dimension zwei.

Die Vektoren $(1, -1, 1, 0)^\top, (1, -3, 1, 1)^\top$ sind Lösungen von $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ und linear unabhängig, da der zweite kein Vielfaches des ersten ist. Sie bilden daher eine Basis des Kerns von $\mathbf{A}$.

Die zweite Antwort ist falsch, weil jede Basis des Kerns von $\mathbf{A}$ zwei Elemente hat.

Die dritte und fünfte Antwort sind falsch, weil Vektoren im $\mathbb{R}^3$ nicht im Kern von $\mathbf{A}$ liegen.

Die vierte Antwort ist falsch, weil $(1, 0, -1, 0)^\top$ keine Lösung von $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ ist.

7.5d) Der Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ die Koordinaten $(-1, -1)$. Die Koordinaten bezüglich der Standardbasis sind ...

(i) $(\frac{1}{2}, 0)$.

(ii) $(-1, -1)$.

(iii) $(0, -2)$.

√ (iv) $(2, 0)$.

(v) $(1, 1)$.

Da der gegebene Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ die Koordinaten $(-1, -1)$ hat, gilt

$$\mathbf{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daher sind $(2, 0)$ die Koordinaten von $\mathbf{v}$ bezüglich der Standardbasis.

Veröffentlichung am 3. November 2015.
Abzugeben bis 11. November 2015.