P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Beispiellösung für Serie 8

Aufgabe 8.1 Basen für Bild und Kern

Gegeben sind die beiden 2×3 Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

8.1a) Bestimmen Sie Basen für $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}), \mathrm{Bild}(\mathbf{A}^\top), \mathrm{Kern}(\mathbf{A}), \mathrm{Kern}(\mathbf{A}^\top)$.

Lösung:

Kern von $\mathbf{A}$: Die Spalten der Matrix $\mathbf{A}$ sind Vielfache voneinander, also sind sie linear abhängig und $\mathbf{A}$ hat Rang 1. Somit hat das Bild von $\mathbf{A}$ Dimension 1. Aus dem Dimensionssatz für Matrizen folgt, dass der Kern von $\mathbf{A}$ Dimension 2 haben muss. Wir bestimmen den Kern von $\mathbf{A}$, in dem wir zwei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{x}$ suchen, welche $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ erfüllen.

Man bringt $\mathbf{A}$ in Zeilenstufenform $\mathbf{Z}$,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann folgt

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\}.$$

Bild von $\mathbf{A}$: Wie vorher bemerkt, sind die Spalten von $\mathbf{A}$ linear abhängig, und das Bild hat deswegen Dimension 1,

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{span}\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \}.$$

Kern von $\mathbf{A}^\top$: Wir bemerken wieder, dass die Spalten von $\mathbf{A}^\top$ linear abängig sind und das Bild der Matrix deswegen Dimension 1 hat. Aus dem Dimensionssatz für Matrizen folgt, dass $\dim \mathrm{Kern}(\mathbf{A}^\top) = 1$. Man bringt $\mathbf{A}^\top$ in Zeilenstufenform $\mathbf{Z}$,

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir finden

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}^\top) = \mathrm{span}\{\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\}.$$

Bild von $\mathbf{A}^\top$: Wie vorher bemerkt, hat das Bild der Matrix Dimension 1, da die Spaltenvektoren linear abängig sind,

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A}^\top) = \mathrm{span}\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)\right\}.$$

8.1b) Bestimmen Sie Basen für $\mathrm{Bild}(\mathbf{B}), \mathrm{Bild}(\mathbf{B}^\top), \mathrm{Kern}(\mathbf{B}), \mathrm{Kern}(\mathbf{B}^\top)$.

Lösung:

Kern von $\mathbf{B}$: Die Zeilenstufenform **Z**von $\mathbf{B}$ ist:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathbf{B}$ hat Rang 2. $\mathrm{Kern}(\mathbf{B})$ hat Dimension 1.,

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{B}) = \mathrm{span}\left\{\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right\}.$$

Bild von $\mathbf{B}$: Die 1. und die 3. Spalte von $\mathbf{B}$ sind linear abhängig. Also lässt sich das Bild von $\mathbf{B}$ mit der 1. und 2. Spalte beschreiben, $\mathrm{Bild}(\mathbf{B}) = \mathrm{span}\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)\}$.

Kern von $\mathbf{B}^\top$: Laut Dimensionssatz für Matrizen ist $\dim \mathrm{Bild}(\mathbf{C}) + \dim \mathrm{Kern}(\mathbf{C}) = n$, für eine Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m,n}$. Da $\dim \mathrm{Bild}(\mathbf{B}^\top) = 2$, muss $\dim \mathrm{Kern}(\mathbf{B}) = 0$ sein. Womit klar ist, dass $\mathrm{Kern}(\mathbf{B}^\top) = \{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\}$.

Bild von $\mathbf{B}^\top$: $\mathrm{Bild}(\mathbf{B}^\top) = \mathrm{span}\left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)\right\}$

Aufgabe 8.2 Lineare Abhängigkeit von Mengen von Vektoren

In der Vorlesung haben Sie lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit definiert. In dieser Aufgabe geht es darum, die Begriffe ein wenig genauer zu untersuchen und sich zu überlegen, in welchen Fällen Sie es mit linear abhängigen bzw. unabhängigen Mengen von Vektoren zu tun haben.

Seien $k, n, p \in \mathbb{N}$. Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

8.2a) Die Menge $\mathcal{S} := \{\mathbf{0}\}$, welche nur aus dem Nullvektor in $\mathbb{R}^n$ besteht ist linear unabhängig.

(i) Richtig.

√ (ii) Falsch.

Die Aussage ist falsch. Verwenden wir die Definition der linearen (Un)Abhängigkeit, so erhalten wir

$$\alpha_1 \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 \in \mathbb{R}, \text{ beliebig}\,.$$

Somit ist die Menge von Vektoren $\mathcal{S} = \{\mathbf{0}\}$ nicht linear unabhängig, also linear abhängig.

8.2b) Eine Menge $\mathcal{S} := \{\mathbf{v}\}$, welche nur einen einzigen nicht-Null-Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ enthält, ist linear unabhängig.

√ (i) Richtig.

(ii) Falsch.

Die Aussage ist richtig. Wir verwenden wieder die Definition der linearen (Un)Abhängigkeit und erhalten

$$\alpha_1 \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = 0, \text{ da } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\,.$$

Somit ist die Menge von Vektoren $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}\}$ linear unabhängigg.

8.2c) Die Menge $\mathcal{S} := \{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\} \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann linear abhängig, wenn einer der Vektoren aus $\mathcal{S}$ ein skalares Vielfaches des anderen Vektors darstellt.

√ (i) Richtig.

(ii) Falsch.

Die Aussage ist richtig. Wir verwenden wieder die Definition der linearen Abhängigkeit und erhalten

$$\alpha_1 \mathbf{v}^1 + \alpha_2 \mathbf{v}^2 = \mathbf{0} \;\Rightarrow\; \text{Es existiert eine Lösung } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}. \tag{8.2.1}$$

Also gilt entweder $\alpha_1 \neq 0$ oder $\alpha_2 \neq 0$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass gilt $\alpha_1 \neq 0$ (ansonsten vertauschen wir die Rolle von $\mathbf{v}^1$ und $\mathbf{v}^2$).

Wir können nun die Vektorgleichung (8.2.1) nach $\mathbf{v}_1$ auflösen

$$(8.2.1) \Leftrightarrow \mathbf{v}^1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\mathbf{v}^2\,,$$

und erhalten die Darstellung von $\mathbf{v}^1$ als skalares Vielfaches von $\mathbf{v}^2$.

8.2d) Es gibt Vektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass die Menge $\{\mathbf{0}, \mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k\}$ linear unabhängig ist.

(i) Richtig.

√ (ii) Falsch.

Die Aussage ist falsch. Die Definition der linearen (Un)Abhängigkeit lautet in diesem Fall

$$\alpha_1 \mathbf{0} + \alpha_2 \mathbf{v}^1 + \cdots + \alpha_{k+1} \mathbf{v}^k = \mathbf{0}\,. \tag{8.2.2}$$

Wir bemerken, dass $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden kann. Somit ist zum Beispiel $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{k+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{\mathbf{0}\}$ eine nichttriviale Lösung von (8.2.2). Die Menge ist folglich linear abhängig.

8.2e) Wenn die Menge $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathbb{R}^n$ linear abhängig ist, dann ist auch die Menge $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^k, \mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \ldots, \mathbf{w}^p\} \subset \mathbb{R}^n$ linear abhängig für beliebige Vektoren $\mathbf{w}^i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, \ldots, p\}$.

√ (i) Richtig.

(ii) Falsch.

Die Aussage ist richtig. Nach Definition der linearen (Un)Abhängigkeit erhalten wir

$$\alpha_1 \mathbf{v}^1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}^k + \alpha_{k+1} \mathbf{w}^1 + \cdots + \alpha_{k+p} \mathbf{w}^p = \mathbf{0}\,. \tag{8.2.3}$$

Da nach Annahme $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k\}$ linear abhängig sind, gibt es einen nicht-Null-Vektor $\mathbf{a} := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^k \setminus \{\mathbf{0}\}$, für welchen gilt

$$\alpha_1 \mathbf{v}^1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}^k = \mathbf{0}\,.$$

Erweitern wir diesen Vektor $\mathbf{a}$ um $\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_{k+p} = 0$, dann erfüllt dieser Vektor $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+p} \setminus \{\mathbf{0}\}$ die Bedingung (8.2.3). Die Menge $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^k, \mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \ldots, \mathbf{w}^p\} \subset \mathbb{R}^n$ ist somit linear abhängig.

8.2f) Sofern $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\} \subset \mathbb{R}^n$ linear unabhängig ist, die Menge $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\} \subset \mathbb{R}^n$ jedoch linear abhängig, dann kann $\mathbf{v}^3$ als Linearkombination von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ dargestellt werden.

√ (i) Richtig.

(ii) Falsch.

Wir starten wieder mit der Definition der linearen (Un)Abhängigkeit. Die erste Aussage, dass $\left\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\right\} \subset \mathbb{R}^n$ linear unabhängig ist, liefert uns

$$\alpha_1 \mathbf{v}^1 + \alpha_2 \mathbf{v}^2 = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \,. \tag{8.2.4}$$

somit muss für die zweite Aussage gelten, dass es ein $\alpha_3 \neq 0$ gibt, sodass gilt

$$\alpha_1 \mathbf{v}^1 + \alpha_2 \mathbf{v}^2 + \alpha_3 \mathbf{v}^3 = \mathbf{0} \,. \tag{8.2.5}$$

Ansonsten hätten wir die Gleichung auf (8.2.4) zurückgeführt und nur die triviale Lösung, was im Widerspruch zur linearen Abhängigkeit von $\left\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\right\}$ stehen würde.

Da es ein $\alpha_3 \neq 0$ gibt, können wir die Gleichung (8.2.5) umformen zu

$$\mathbf{v}^3 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\mathbf{v}^1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\mathbf{v}^2 \,. \tag{8.2.6}$$

Aufgabe 8.3 Lineare Abhängigkeit orthogonaler Vektoren

Es sei $\mathcal{M} := \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ eine Menge von von $\mathbf{0}$ verschiedenen Vektoren in $\mathbb{R}^n$ für die gilt

$$\langle \mathbf{v}^m, \mathbf{v}^l \rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad l, m \in \{1, \ldots, k\},\ m \neq l \,. \tag{8.3.1}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ linear unabhängig ist.

Lösung: Wir betrachten die Vektorgleichung

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = 0.$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ genau dann linear unabhängig sind, wenn die einzigen α_ℓ, $\ell = 1, \ldots, k$, die die obige Gleichung erfüllen, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k \equiv 0$ sind. Wir bilden das Skalarprodukt der obigen Gleichung mit einem beliebigen $\mathbf{v}_\ell$, $\ell = 1, \ldots, k$.

$$\langle \mathbf{v}_\ell, \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k \rangle = 0.$$

Da das Skalarprodukt linear ist, ist dies equivalent zu

$$\alpha_1 \langle \mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_1 \rangle + \alpha_2 \langle \mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_2 \rangle + \cdots + \alpha_k \langle \mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_k \rangle = 0.$$

Nun verwenden wir (8.3.1), und finden

$$\alpha_\ell \langle \mathbf{v}_\ell, \mathbf{v}_\ell \rangle = 0,$$

weil alle anderen Summanden null sind. Da $\mathbf{v}_\ell \neq 0$ impliziert das, dass $\alpha_\ell = 0$. Wir erinnern uns, dass wir ℓ beliebig gewählt haben. Das selbe Argument können wir aslo für alle $\ell = 1, \ldots, k$ wiederholen und finden so, dass $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. Somit sind die Vektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ linear unabhängig.

Aufgabe 8.4 Orthonormale Basis

Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$, $\mathbf{v}^{(3)}$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, d. h. zeigen Sie, dass $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$, $\mathbf{v}^{(3)}$

- Einheitsvektoren sind (das bedeutet, dass ihre Länge 1 ist, i.e. $\sqrt{\langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}^{(i)} \rangle} = 1$, $i = 1, 2, 3$),
- paarweise orthogonal sind,
- eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Lösung: Einheisvektoren: Zu zeigen ist, dass $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$, $\mathbf{v}^{(3)}$ die Länge 1 haben:

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{v}^{(1)}\right\| &= \sqrt{\langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(1)} \rangle} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{12}} = 1 \\ \left\|\mathbf{v}^{(2)}\right\| &= \sqrt{\langle \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(2)} \rangle} = \sqrt{\frac{1}{3} + 0 + \frac{2}{3}} = 1 \\ \left\|\mathbf{v}^{(3)}\right\| &= \sqrt{\langle \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{v}^{(3)} \rangle} = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{12}} = 1 \end{aligned}$$

Paarweise orthogonal: Zu zeigen ist, dass $\langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}^{(j)} \rangle = 0$ für $i \neq j$:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)} \rangle &= \frac{1}{3} + 0 - \frac{2}{6} = 0 \\ \langle \mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(3)} \rangle &= \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{12} = 0 \\ \langle \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)} \rangle &= \frac{1}{3} + 0 - \frac{2}{6} = 0 \end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie des Skalarprodukts gilt dann automatisch auch $\langle \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(1)} \rangle = 0$ usw.

Der $\mathbb{R}^3$ ist 3-dimensional. Deswegen bilden die drei paarweise orthogonalen Einheitsvektoren $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$, $\mathbf{v}^{(3)}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Zusammenfassend sind sie also eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 8.5 Basiswechsel

Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $\mathcal{B}$. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von V nach V.

8.5a) Durch die Wahl der neuen Basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix T von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$.

8.5b) Durch welche Matrix B wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten beschrieben?

8.5c) Interpretieren Sie die Abbildung geometrisch.

Lösung: a) Die Übergangsmatrix von $\mathcal{B}'$ nach $\mathcal{B}$ ist durch

$$S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

gegeben, weil deren Spalten aus den Koordinatenvektoren der neuen Basisvektoren bezüglich der Standardbasis bestehen. Die gesuchte Übergangsmatrix T von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$ ist invers zu S. Wir invertieren darum S mit dem Gaussverfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Somit gilt

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

b) Nach der Formel aus der Vorlesung gilt $B = TAT^{-1} = TAS$. Somit bekommen wir

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Wir bezeichnen die Basisvektoren aus $\mathcal{B}'$ mit b_1', b_2' und b_3'. Nach Aufgabenteil b) wird b_1' auf $-b_1'$ und b_2' auf $-b_2'$, sowie b_3' auf 0 abgebildet. Somit handelt es sich um die Projektion entlang

b_3' auf die Ebene, die durch b_1' und b_2' aufgespannt wird, gefolgt von einer Punktspiegelung am Nullpunkt.

Bemerkung: Weil b_3' senkrecht auf b_1' und b_2' steht, ist die obige Projektion entlang b_3' die Orthogonalprojektion auf die Ebene, die durch b_1' und b_2' aufgespannt wird (bezüglich des Standardskalarprodukts).

Aufgabe 8.6 Unterräume des $\mathbb{R}^3$

8.6a) Sei V die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$: $\left\{(x, y, 2x+y)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$. Zeigen Sie, dass V ein Unterraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ ist.

Lösung: V ist offensichtlich eine nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}^3$. Wir müssen also noch die restlichen zwei Bedingungen der Definition für Unterräume überprüfen.

Wir zeigen: $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x+y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$:

- Seien $a = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 2x_1 + y_1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 2x_2 + y_2 \end{pmatrix} \in V$. Es gilt:

  $$a + b = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 2(x_1 + x_2) + y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 2x_3 + y_3 \end{pmatrix} \in V,$$

  wobei $x_3 = x_1 + x_2$, $y_3 = y_1 + y_2$.

- Sei a wie oben, $\alpha \in \mathbb{R}$:

  $$\alpha a = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha y_1 \\ 2\alpha x_1 + \alpha y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 2x_4 + y_4 \end{pmatrix} \in V,$$

  wobei $x_4 = \alpha x_1$, $y_4 = \alpha y_1$.

Also ist V ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

8.6b) Ist die Menge $W = \left\{(x, 2x+1, x)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ auch ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: W ist offensichtlich eine nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}^3$. Wir müssen also noch die restlichen zwei Bedingungen in der Definition für Unterräume überprüfen.

Seien $a = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 + 1 \\ x_1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_2 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in W$. Dann gilt:

$$a + b = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2(x_1 + x_2) + 2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \notin W.$$

W ist also <u>kein</u> Unterraum von $\mathbb{R}^3$!

Bemerkung: Wenn wir zeigen wollen, dass etwas im Allgemeinen gilt, so müssen wir es für *alle* Fälle nachprüfen (wie hier bei Teilaufgabe 8.6a), wir prüfen es für *alle* $a, b \in V$ und für *alle* $\alpha \in \mathbb{R}$). Wenn wir hingegen zeigen wollen, dass etwas im Allgemeinen *nicht* gilt, so genügt es *ein* Gegenbeispiel zu finden.
Teilaufgabe 8.6b) lässt sich somit einfacher lösen, indem man z. B. feststellt, dass zwar $v := (1, 3, 1)^\top$ ein Element von W ist (mit $x = 1$), aber $v + v = (2, 6, 2)^\top$ nicht in W ist (da kein $x \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $v + v = (x, 2x + 1, x)^\top$).

Aufgabe 8.7 Ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$

Die Vektoren $a = (1, -2, 5, -3)^\top$, $b = (2, 3, 1, -4)^\top$ und $c = (3, 8, -3, -5)^\top$ erzeugen einen Unterraum W von $\mathbb{R}^4$.

8.7a) Bestimmen Sie $\dim W$ und eine Basis von W.

8.7b) Vervollständigen Sie diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

8.7c) Geben Sie ein homogenes LGS an, welches W als Lösungsraum hat.

Lösung: a) Wir wenden das Gaussverfahren auf die Matrix mit den Zeilen a, b und c an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 8 & -3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 14 & -18 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beim Gaussverfahren wird der von den Zeilen erzeugte Unterraum nicht verändert. Deshalb ist $\dim W = 2$ und

$$\{(1, -2, 5, -3)^\top, (0, 7, -9, 2)^\top\}$$

eine Basis von W.

b) Eine mögliche Vervollständigung dieser Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ ist

$$\{(1, -2, 5, -3)^\top, (0, 7, -9, 2)^\top, (0, 0, 1, 0)^\top, (0, 0, 0, 1)^\top\}.$$

Dies ist eine Basis, weil die Zeilenstufenform der Matrix A mit diesen Zeilen die Einheitsmatrix ist.

c) Die lineare Gleichung $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 = 0$ hat die Basisvektoren $(1, -2, 5, -3)^\top$ und $(0, 7, -9, 2)^\top$ von W als Lösung für $(x_1, x_2, x_3, x_4)^\top$, falls $(u_1, u_2, u_3, u_4)^\top$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 7 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

ist. Durch Rückwärtseinsetzen sehen wir, dass dies genau dann der Fall ist, wenn

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{9}{7}u_3 - \frac{2}{7}u_4, \\ u_1 &= 2u_2 - 5u_3 + 3u_4 = -\frac{17}{7}u_3 + \frac{17}{7}u_4 \end{aligned}$$

gilt, wobei u_3 und u_4 frei gewählt werden können. Wir wählen $(u_3, u_4) = (7, 0)$ und $(u_3, u_4) = (1, 1)$ und sehen, dass das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} -17x_1 & + & 9x_2 & + & 7x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

die Basisvektoren $(1, -2, 5, -3)^\top$, $(0, 7, -9, 2)^\top$ von W als Lösung hat. Die Koeffizientenmatrix dieses LGS ist in Zeilenstufenform und hat Rang 2. Daher hat der Lösungsgraum dieses LGS die Dimension $4 - 2 = 2$. Da die obigen Basisvektoren von W im Lösungsraum liegen, ist dieser gleich W.

Veröffentlichung am 10. November 2015.

Abzugeben bis 18. November 2015.