P. Grohs
T. Welti
F. Weber



ETH Zürich
D-MATH

# Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

## Beispiellösung für Serie 9

### Aufgabe 9.1 Bestimmung orthogonaler Matrizen anhand von Parametergleichungen

In der Vorlesung (wie auch in Aufgabe 7.2 von Serie 7) wurden orthogonale Matrizen eingeführt. Die Orthogonalität einer Matrix verifiziert man üblicherweise direkt aus der Definition.

Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -c & d \\ e & 0 & -f \end{pmatrix}, \tag{9.1.1}$$

wobei $a, b, c, d, e, f \in [0, \infty)$.

**9.1a)** Wieviele Bestimmungsgleichungen für die Einträge einer $3 \times 3$-Matrix sind durch die Eigenschaft der Orthogonalität impliziert?

**Tipp:** Beachten Sie, dass für $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3,3}$ das Matrixprodukt $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top$ immer *symmetrisch* ist.

**Lösung:** Da die Gleichung $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top = \mathbf{I}$ die Bedingungsgleichung ist, und $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top$ immer symmetrisch ist, also nur vom oberen Dreiecksteil, d.h. $a_{ij}, i \leq j$, bestimmt wird, erhalten wir für $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3,3}$ $\frac{n(n+1)}{2}$ Bestimmungsgleichungen für $a, b, c, d, e$ und $f$. In unserem Fall, $n = 3$, erhalten wir folglich 6 Bestimmungsgleichungen.

**9.1b)** Finden Sie Werte für die Parameter $a, b, c, d, e, f \in [0, \infty)$ so, dass die Matrix $\mathbf{B}$ aus (9.1.1) orthogonal ist.

**Lösung:** Durch berechnen von $\mathbf{B}\mathbf{B}^\top = \mathbf{I}$ erhalten wir

(i) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + e^2 = 1$,

(ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}a - \frac{1}{\sqrt{3}}c = 0$,

(iii) $\frac{1}{\sqrt{3}}b + \frac{1}{\sqrt{3}}d - fe = 0$,

(iv) $a^2 + c^2 = 1$,

(v) $ab - cd = 0$,

(vi) $b^2 + d^2 + f^2 = 1$.

Aus (i) erhalten wir $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$; aus (ii) $a = c$. Einsetzen in (iv) gibt uns $a = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Aus (v) erhalten wir $b = d$ und aus (iii) $f = 2b$. Wenn wir beide Ausdrücke in (vi) einsetzen, erhalten wir schliesslich $b = d = \frac{1}{\sqrt{6}}$ und $f = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

## Aufgabe 9.2 QR-Zerlegung von Matrizen mithilfe des Gram-Schmidt-Algorithmus

In dieser Aufgabe sollen Sie den Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsalgorithmus einmal "von Hand" durchführen, um seine Details zu verstehen. Zusätzlich sollen Sie lernen, wie man als Nebenprodukt auch die Matrix $\mathbf{R}$ aus der QR-Zerlegung erhält.

Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} .$$

**9.2a)** Wenden Sie den Gram-Schmidt-Algorithmus an und finden Sie eine Orthonormalbasis für den Spaltenraum von $\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{B}$.

**Lösung:** Wir nehmen die Spalten von $\mathbf{A}$: $\mathbf{a}^{(1)} := \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{a}^{(2)} := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und wenden den Gram-Schmidt'schen Algorithmus darauf an (siehe Vorlesungsmitschrift):

$$\mathbf{q}^{(1)} := \frac{1}{\|\mathbf{a}^{(1)}\|}\mathbf{a}^{(1)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{q}}^{(2)} := \mathbf{a}^{(2)} - \langle \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{q}^{(1)} \rangle \mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(2+1+2)\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9-10 \\ 9-5 \\ 9-10 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}^{(2)} := \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten die Orthonormalbasis $\mathcal{A} = \left\{\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}\right\} = \left\{ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ für den Spaltenraum von $\mathbf{A}$.

Für die Spalten von $\mathbf{B}$, $\mathbf{b}^{(1)} := \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{b}^{(2)} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\mathbf{b}^{(3)} = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ erhalten wir analog

$$\mathbf{q}^{(1)} := \frac{1}{\|\mathbf{b}^{(1)}\|}\mathbf{b}^{(1)} = \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{q}}^{(2)} := \mathbf{b}^{(2)} - \langle \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{q}^{(1)} \rangle \mathbf{q}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{6}}{6}(6-1-1)\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9-4 \\ -3-2 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \frac{5}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q}^{(2)} := \frac{\widetilde{\mathbf{q}}^{(2)}}{\|\widetilde{\mathbf{q}}^{(2)}\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathbf{q}}^{(3)} := \mathbf{b}^{(3)} - \langle \mathbf{b}^{(3)}, \mathbf{q}^{(1)} \rangle \mathbf{q}^{(1)} - \langle \mathbf{b}^{(3)}, \mathbf{q}^{(2)} \rangle \mathbf{q}^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 .$$

Die letzte Gleichung ist gleichbedeutend dazu, dass $\mathbf{b}^{(3)}$ bereits im $\operatorname{span}\{\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}\}$ liegt. Der Algorithmus bricht ab, da die Bedingung $\|\widetilde{\mathbf{q}}^{(3)}\| = 0$ erfüllt ist.

Wir erhalten die Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}\} = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ für den Spaltenraum von $\mathbf{B}$.

**9.2b)** Ist die (sparsame) $\mathbf{QR}$-Zerlegung von $\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{B}$ definiert? Falls ja, bestimmen Sie diese mithilfe der in Teilaufgabe 9.2a) erhaltenen Ergebnisse. Die sparsame $\mathbf{QR}$-Zerlegung einer Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n,k}$ mit $\operatorname{Rang}\mathbf{C} = k$ bezeichnet hierbei die $\mathbf{QR}$-Zerlegung, bei der $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,k}$ und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{k,k}$, das heisst, $\mathbf{Q}$ wird *nicht* zu einer orthogonalen (quadratischen) Matrix erweitert und an $\mathbf{R}$ werden *keine* Nullzeilen "angefügt".

**Lösung:** Wir benutzen die Ergebnisse aus Teilaufgabe 9.2a): Für $\mathbf{C} = \mathbf{QR}$ mit $\mathbf{Q}^\top\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ gilt $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^\top\mathbf{QR} = \mathbf{Q}^\top\mathbf{C}$. Dies erlaubt uns die Berechnung von $\mathbf{R}$, sobald $\mathbf{Q}$ bekannt ist.

Für $\mathbf{A}$ schreiben wir die Vektoren $\mathbf{q}^{(1)}$, $\mathbf{q}^{(2)}$ in die Spalten von $\mathbf{Q}$, und erhalten

$$\mathbf{Q} := \begin{pmatrix} \mathbf{q}^{(1)} & \mathbf{q}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R} := \mathbf{Q}^\top\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

Nun wenden wir uns $\mathbf{B}$ zu. Beachten Sie, dass der Spaltenraum einer Matrix nichts anderes als das Bild dieser Matrix ist. Somit wissen wir aus Teilaufgabe 9.2a), dass $\dim\operatorname{Bild}(\mathbf{B}) = 2 = \operatorname{Rang}\mathbf{B}$. Weil die Matrix $\mathbf{B}$ drei Spalten hat, besitzt $\mathbf{B}$ also keinen vollen Spaltenrang und ihre $\mathbf{QR}$-Zerlegung ist nicht definiert. Dies lässt sich einfach sehen, wenn man sich die Konstruktionsweise der $\mathbf{QR}$-Zerlegung einer allgemeinen Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n,k}$ anschaut. Die zugehörige Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,k}$ erhält man, indem man das Gram-Schmidt-Verfahren auf die $k$ Spalten $\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}, \ldots, \mathbf{c}^{(k)}$ von $\mathbf{C}$ anwendet. Die so entstandenen $k$ Vektoren $\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}, \ldots, \mathbf{q}^{(k)}$ (die Spalten von $\mathbf{Q}$) sind orthonormal und damit linear unabhängig, also gilt $\operatorname{Rang}\mathbf{Q} = k$. Ausserdem folgt aus der Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens, dass

$$\operatorname{Bild}(\mathbf{Q}) = \operatorname{span}\{\mathbf{q}^{(1)}, \mathbf{q}^{(2)}, \ldots, \mathbf{q}^{(k)}\} = \operatorname{span}\{\mathbf{c}^{(1)}, \mathbf{c}^{(2)}, \ldots, \mathbf{c}^{(k)}\} = \operatorname{Bild}(\mathbf{C}).$$

Wir folgern, dass $k = \operatorname{Rang}\mathbf{Q} = \dim\operatorname{Bild}(\mathbf{Q}) = \dim\operatorname{Bild}(\mathbf{C}) = \operatorname{Rang}\mathbf{C}$ gelten muss, damit die $\mathbf{QR}$-Zerlegung von $\mathbf{C}$ definiert ist. Also ist die $\mathbf{QR}$-Zerlegung von $\mathbf{C}$ nur definiert, wenn $\mathbf{C}$ vollen Spaltenrang hat.

## Aufgabe 9.3 Eine einfache lineare Regression

Gegeben sei eine natürliche Zahl $n$. Anhand von $n$ Messungen der skalaren Grösse $x$ haben wir $n$ (leicht verschiedene) Messwerte $m_1$, $m_2$,…,$m_n$ für $x$ erhalten aus denen wir durch Lösen eines überbestimmten linearen Gleichungssystems im Sinne der kleinsten Quadrater eine Schätzung für $x$ erhalten wollen.

Kleinste-Quadrate-Lösung von überbestimmten linearen Gleichungssystemen.

**9.3a)** Stellen Sie das überbestimmte lineare Gleichungssystem für das vorliegende Problem auf.

**Lösung:** Das überbestimmte lineare Gleichungssystem lässt sich schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}.$$

**9.3b)** Stellen Sie die zugehörigen *Normalengleichugen* gemäss der Vorlesung auf.

**Lösung:** Wir schreiben $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix}$. Dann $\mathbf{A}^\top\mathbf{A} = n$, and $\mathbf{A}^\top\mathbf{b} = m_1 + \ldots + m_n$. Folglich erhalten wir

$$\mathbf{A}^\top\mathbf{A}x = \mathbf{A}^\top\mathbf{b} \Rightarrow nx = m_1 + \ldots + m_n.$$

**9.3c)** Bestimmen Sie die *Kleinste-Quadrate-Lösung* und interpretieren Sie das Ergebnis.

**Lösung:** Nach der obigen Normalengleichung sehen wir leicht, dass der geschätzte Wert genau der arithmetische Mittelwert ist,

$$x = \frac{m_1 + \ldots + m_n}{n}. \tag{9.3.1}$$

## Aufgabe 9.4 Polynomiale Regression

Auch in dieser Aufgabe geht es wieder um die Bestimmung von Parametern aus Messwerten mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate aus der Vorlesung. Die Parameter sind hier nicht unmittelbar in der Aufgabenstellung bezeichnet, so wie das bei "real-life"-Problemen immer der Fall ist.

Sei die Funktion $f(x)$ gegeben als *Linearkombination* der Funktionen

$$g_1(x) = 2^x \quad \text{und} \quad g_2(x) = 2^{-x}.$$

Anhand von Messungen wurde festgestellt, dass der Graph von $f(x)$, gegeben durch

$$\mathrm{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \,:\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2,$$

durch folgende Punkte der $(x, y)$-Ebene verläuft:

| $x_i$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | $-8$ | $-4$ | $-2$ | $4$ | $12$ |

**9.4a)** Auf welches überbestimmte lineare Gleichungssystem führt die Schätzung von $f$?

**Lösung:** Da die Funktion $f$ eine Linearkombination der Funktionen $g_1$ und $g_2$ ist, kann sie als

$$f(x) = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x) = \alpha 2^x + \beta 2^{-x}$$

geschrieben werden, wobei wir $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ schätzen wollen. Wir sehen, dass

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\alpha + 4\beta + 8 &= r_1 \\
\frac{1}{2}\alpha + 2\beta + 4 &= r_2 \\
\alpha + \beta + 2 &= r_3 \\
2\alpha + \frac{1}{2}b - 4 &= r_4 \\
4\alpha + \frac{1}{4}b - 12 &= r_5.
\end{aligned}$$

die Gleichungen der Einträge des Residuenvektors $\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*$ sind, mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 4 \\ \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} \\ 4 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -2 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} \ \text{und} \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

**9.4b)** Was sind die zugehörigen Normalengleichungen?

**Lösung:** Wir erhalten in der Normalengleichung

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{341}{16} & 5 \\ 5 & \frac{341}{16} \end{pmatrix}, \mathbf{A}^\top \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 50 \\ -37 \end{pmatrix}.$$

**9.4c)** Verwenden Sie die Kleinste-Quadrate-Methode, um $f(x)$ aus den Messdaten “zu bestimmen”.

**Lösung:** Durch lösen der Normalengleichung $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$ erhalten wir

$$\alpha = \frac{3680}{1263} \ \text{und} \ \beta = -\frac{3056}{1263}.$$

## Aufgabe 9.5 Berechnung der Determinante einer $6 \times 6$-Matrix

In dieser Aufgabe geht es um die Berechnung der Determinante einer eingermassen “grossen” $6 \times 6$-Matrix. Diese Aufgabe war eine Prüfunsaufgabe in der Basisprüfung vor acht Jahren.

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6,6}.$$

**9.5a)** Berechnen Sie $\det \mathbf{A}$.

**Tipp:** Wenden Sie nicht direkt das Gaussverfahren an, sondern nutzen Sie die Struktur der Matrix aus (stand nicht in der Prüfung).

**Lösung:** Wir betrachten im Folgenden

$$\mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{pmatrix}$$

anstatt von $\mathbf{A}$, da $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^\top$ und $\det \mathbf{A}^\top$ hier einfacher zu berechnen ist.
Erste Variante: Aus K. Nipp/D. Stoffer, Lineare Algebra, 5. Auflage 2002, Lemma 3.7 wissen wir, dass für quadratische Matrizen $\mathbf{M}$ der Gestalt

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

gilt: $\det \mathbf{M} = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{C}$. Dies kann man natürlich rekursiv anwenden. Zerlege

$$\mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} a & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{C} \end{pmatrix}, \text{ wobei } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ \mathbf{O} & \mathbf{F} \end{pmatrix}, \text{ mit}$$
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2 & b & 7 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^\top &= a \cdot \det \mathbf{C} = a \cdot \det \mathbf{D} \cdot \det \mathbf{F} \\ &= a \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & b \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ c & 2 \end{vmatrix} \\ &= a(-1)(-6+b)(-2-c) = a(b-6)(c+2) \end{aligned}$$

Zweite Variante (mit Gauss):

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^\top = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & -2 & b & 7 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 2 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & b-6 & 11 & -10 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+c \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^2 \cdot a \cdot (-1) \cdot (b-6) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot (c+2) = a(b-6)(c+2)$$

wie erwartet.

**9.5b)** Für welche Werte der Parameter $a, b, c, d$ ist die Matrix $\mathbf{A}$ singulär?

**Lösung:** $\mathbf{A}$ ist singulär, genau dann wenn $\det \mathbf{A} = 0$. Damit ist die Matrix singulär, falls:

- $a = 0$; $b$, $c$, $d$ beliebig.
- $b = 6$; $a$, $c$, $d$ beliebig.
- $c = -2$; $a$, $b$, $d$ beliebig.

Insbesondere der Fall $a = 0$ ist offensichtlich, da dann alle Einträge der ersten Zeile von $\mathbf{A}$ Null sind.

## Aufgabe 9.6 Multiple Choice: Determinante

Die Determinante von $n \times n$-Matrizen kann als eine Abbildung von $n$ Vektoren in die reellen Zahlen aufgefasst werden, die in jedem Argument linear ist und ihr Vorzeichen bei Vertauschung von zwei Argumenten ändert, siehe Vorlesung.

In dieser einfachen Aufgabe geht es darum, die Rechenregeln der Determinante richtig anzuwenden, bzw. der Versuchung zu widerstehen, gewisse vermeintliche Formeln anzuwenden.

Begründen Sie, welche der folgenden Aussagen richtig sind für beliebige $n \times n$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

(i) $\det(2\mathbf{A}) = 2\det(\mathbf{A})$

$\det(2\mathbf{A}) = 2^n \det(\mathbf{A})$

√ (ii) $\det(\mathbf{A}^4) = (\det(\mathbf{A}))^4$

$\det(\mathbf{A}^2) = \det(\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{A})$ und entsprechend für $\det(\mathbf{A}^4)$.

(iii) $\det(\mathbf{A}) = a_{1,n}\cdot a_{2,n-1}\cdots a_{n,1}$ wenn $a_{i,j}=0$ für $i+j>n+1$, d.h. es handelt sich um eine Dreiecksmatrix, bei welcher rechts unten Nullen stehen.

Nein. Ein einfaches Beispiel ist $n=2$:

$$\det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & 0 \end{pmatrix} = -a_{1,2}a_{2,1}.$$

(iv) $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$

Falsch, zum Beispiel ist $\det\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = 1$, aber $\det\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) = \det\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = 0$.

√ (v) $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$

Stimmt: $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{B})\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{BA})$

√ (vi) Wenn $\mathbf{A}$ singulär ist, dann ist auch $\mathbf{AB}$ singulär.

Wenn $\mathbf{A}$ singulär ist, ist $\det(\mathbf{A}) = 0$. Daher ist $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\cdot\det(\mathbf{B}) = 0$, und somit ist $\mathbf{AB}$ auch singulär.

√ (vii) $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})^3$

$\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^\top)\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})^3$

Veröffentlichung am 17. November 2015.

Abzugeben bis 25. November 2015.