R. Hiptmair
S. Pintarelli
E. Spindler

Herbstsemester 2015

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Prüfung
Sommer 2015

Name		Note
Vorname		
Leginummer		
Datum	14.08.2015	

1	2	3	4	5	6	7	Total
4P	6P	4P	8P	8P	10P	15P	55P

- Bitte füllen Sie zuerst dieses Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, den Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- Prüfungsdauer: 120 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Selbständig verfasste Zusammenfassung von maximal 20 A4 Seiten, nicht ausgedruckt, nicht kopiert.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und legen Sie es weg.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1   Blockmatrixkalkül [4 points]

Geben Sie jeweils für die Matrix $\mathbf{M}$ eine explizite Darstellung als Blockmatrix an. Dabei sind $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$, wobei $\mathbf{A}$ invertierbar ist. Weiter bezeichnen wir die Nullmatrix in $\mathbb{R}^{n,n}$ mit $\mathbf{O}_n$ und die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n,n}$ mit $\mathbf{I}_n$.

(1a)   [2 points]

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O}_n & \mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1}.$$

Lösung:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O}_n & \mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{O}_n & \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix}$$

(1b)   [2 points]

$$\mathbf{M} := \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \\ \mathbf{O}_n & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}^{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Lösung:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \\ \mathbf{O}_n & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}^{k} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & k\mathbf{B} \\ \mathbf{O}_n & \mathbf{I}_n \end{bmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2 Matrizen mit gleichem Kern und Bild [6 points]

(2a) [4 points] Welche notwendigen Bedingungen müssen Paare (m, n) natürlicher Zahlen erfüllen, damit es Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ so gibt, dass gilt

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{Kern}(\mathbf{A}).$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Da bei Gleichheit

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) \tag{2.1}$$

die Dimensionen der Räume übereinstimmen müssen, erhalten wir die notwendige Bedingung $m = n$.

Weiter muss nach dem Dimensionssatz gelten

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) + \dim \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = n\,, &\ \text{ wobei wegen (2.1) } \dim \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \dim \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) \\ \Leftrightarrow\ 2 \dim \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = n\,. & \end{aligned}$$

Somit muss n notwendigerweise gerade sein.

Es bleiben folglich die Paare

$$(2k, 2k)\,, \quad k \in \mathbb{N}$$

zur Auswahl.

Bemerkung. Um auch nachzuweisen, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind, ist noch zu zeigen, dass es immer Matrizen $\mathbf{A}$ mit gerader Dimension $2k$ gibt, die $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ erfüllen. Das gilt etwa für

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_k & \mathbf{I}_k \\ \mathbf{O}_k & \mathbf{O}_k \end{bmatrix}.$$

(2b) [2 points] Geben Sie ein Beispiel an für ein Paar $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ und eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ für welche gilt $m, n \geq 2$ und $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{Kern}(\mathbf{A})$.

Lösung: Sei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

Es gilt, dass $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \mathrm{Span}\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right] = \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$

Aufgabe 3 Kern und Bild symmetrischer Matrizen [4 points]

Wir betrachten eine allgemeine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

(3a) [2 points] Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A})^{\perp} \subset \mathrm{Kern}(\mathbf{A})\,.$$

Lösung:

$$\mathbf{x} \in \mathrm{Bild}(\mathbf{A})^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{\top}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \in \mathrm{Kern}(\mathbf{A})\,,$$

da Orthogonalität von $\mathbf{x}$ zu $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ genau dann vorliegt, wenn der Vektor $\mathbf{x}$ auf allen Spalten von $\mathbf{A}$ senkrecht steht.

Alternative Lösung: Für jede symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, gibt es eine orthonormale Matrix $\mathbf{Q}$, so dass $\mathbf{A}$ von $\mathbf{Q}$ diagonalisiert wird. D.h.

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{:=\mathbf{D}} \mathbf{Q}^{\top}\,.$$

Eine Basis für den Kern von $\mathbf{A}$ wird aufgespannt durch die Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_i = 0$. Das Bild von $\mathbf{A}$ wird aufgespannt durch die Eigenvektoren zu den Eigenwerte $\lambda_i \neq 0$. Aufgrund der Orthogonalität der Eigenvektoren ist deshalb $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})^{\perp} = \mathrm{Kern}(\mathbf{A})$.

(3b) [2 points] Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) \subset \mathrm{Bild}(\mathbf{A})^{\perp}\,.$$

Lösung: Die Schlussrichtung oben lässt sich umkehren:

$$\mathbf{x} \in \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{\top}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} \in \mathrm{Bild}(\mathbf{A})^{\perp}\,.$$

In der letzten Teilaufgabe haben wir herausgefunden, dass $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = \mathrm{Bild}(\mathbf{A})^{\perp}$, deshalb gilt genauso $\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) \subset \mathrm{Bild}(\mathbf{A})^{\perp}$. **Anmerkung:** $\mathcal{V}^{\perp}$ bezeichnet das orthogonale Komplement von $\mathcal{V}$ bezüglich des Euklidischen Skalarproduktes.

Aufgabe 4 Term einer linearen Iteration mit MATLAB [8 points]

Wir untersuchen die MATLAB-Funktion aus Listing 4.1.

Listing 4.1: MATLAB-Funktion `getit`

```
function y = getit(A, x, k)
[S,D] = eig(A);
y = S*diag(diag(D).^k) * (S\x);
end
```

Tipp: MATLAB gibt bei der Eingabe von `help eig` folgende Ausgabe zurück:
`[V,D] = eig(A) produces a diagonal matrix D of eigenvalues and a full matrix V whose columns are the corresponding eigenvectors so that A*V = V*D.`

Tipp: Die MATLAB-Funktion `diag(x)` erzeugt angewandt auf einen Vektor `x` eine Diagonalmatrix mit Diagonalelementen aus `x`. `diag(M)` angewandt auf eine $n \times n$ Matrix `M` gibt einen Vektor mit den Diagonaleinträgen von `M` zurück.

Tipp: Die Operation `v.^k` für einen Spaltenvektor `v` liefert den Spaltenvektor gleicher Grösse, dessen Komponenten die k. Potenzen der Komponenten von `v` sind.

(4a) [4 points] Welche Ausgabe liefert `getit`, wenn im Argument `A` eine diagonalisierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ übergeben wird, im Argument `x` ein Spaltenvektor $\mathbf{x}$ der Länge n und in `k` eine Zahl $k \in \mathbb{N}$?

Lösung: Resultat:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}^k \mathbf{x}\,.$$

(4b) [4 points] Sei $k \in \mathbb{N}$ fixiert. Diskutieren Sie im Detail den asymptotischen Rechenaufwand der MATLAB-Funktion `getit` in Abhängigkeit von der Matrixgrösse n für grosse Werte von n.

Lösung: `getit` führt folgende Rechnungen aus:

- Die Diagonalisierung einer vollbesetzten $n \times n$-Matrix: Asymptotischer Rechenaufwand $O(n^3)$
- Die Multiplikation einer vollbesetzten $n \times n$-Matrix mit einem Spaltenvektor der Länge n: Asymptotischer Rechenaufwand $O(n^2)$
- Das Potenzieren von n Zahlen: Rechenaufwand $O(n)$
- Das Lösen eines linearen Gleichungssystems mit einer vollbesetzten $n \times n$-Matrix: Asymptotischer Rechenaufwand $O(n^3)$

Die Operationen mit der höchsten Potenz von n im Rechenaufwand dominieren, so dass sich ein asymptotischer Gesamtaufwand von $O(n^3)$ für $n \to \infty$ ergibt. ab!

Aufgabe 5 Markov-Kette: Zustände von Proteinen [8 points]

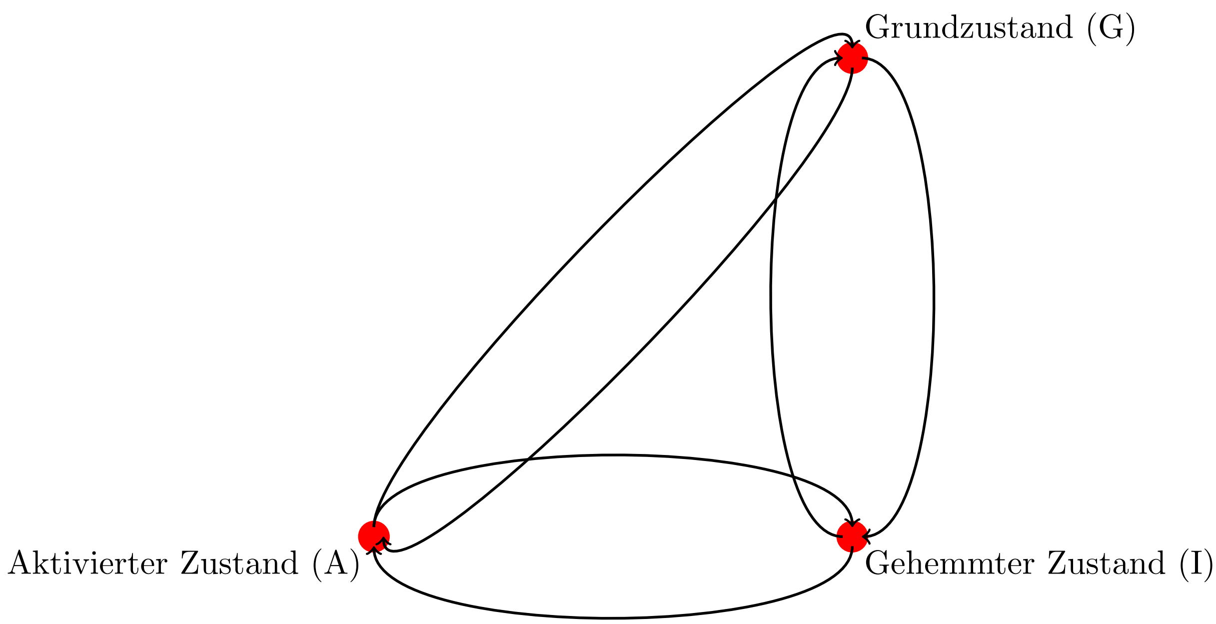

Abbildung 5.1: Skizze der verschiedenen Zustände des Proteins aus Aufgabe 5.

Wir betrachten ein Protein, welches in Lösung in drei möglichen Zuständen vorliegt:

- Grundzustand (G)
- Aktivierter Zustand (A)
- Gehemmter Zustand (I)

Aus reaktionskinetischen Überlegungen weiss man, dass in einer Nanosekunde

- 80% der aktivierten Moleküle in den Grundzustand übergehen.
- Ein Übergang vom aktivierten in den gehemmten Zustand nicht stattfindet.
- 10% der Moleküle im Grundzustand in den aktivierten Zustand und 10% in den gehemmten Zustand übergehen.
- 50% der Moleküle aus dem gehemmten Zustand in den Grundzustand und 5% in den aktivierten Zustand zurückkehren.

(5a) [2 points] Vervollständigen Sie die Skizze aus Abbildung 5.1, indem Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten der Übergänge zwischen den verschiedenen Zuständen eintragen. Die Übergänge sind bereits durch die Pfeile symbolisiert.

Lösung: Siehe Abbildung 5.2.

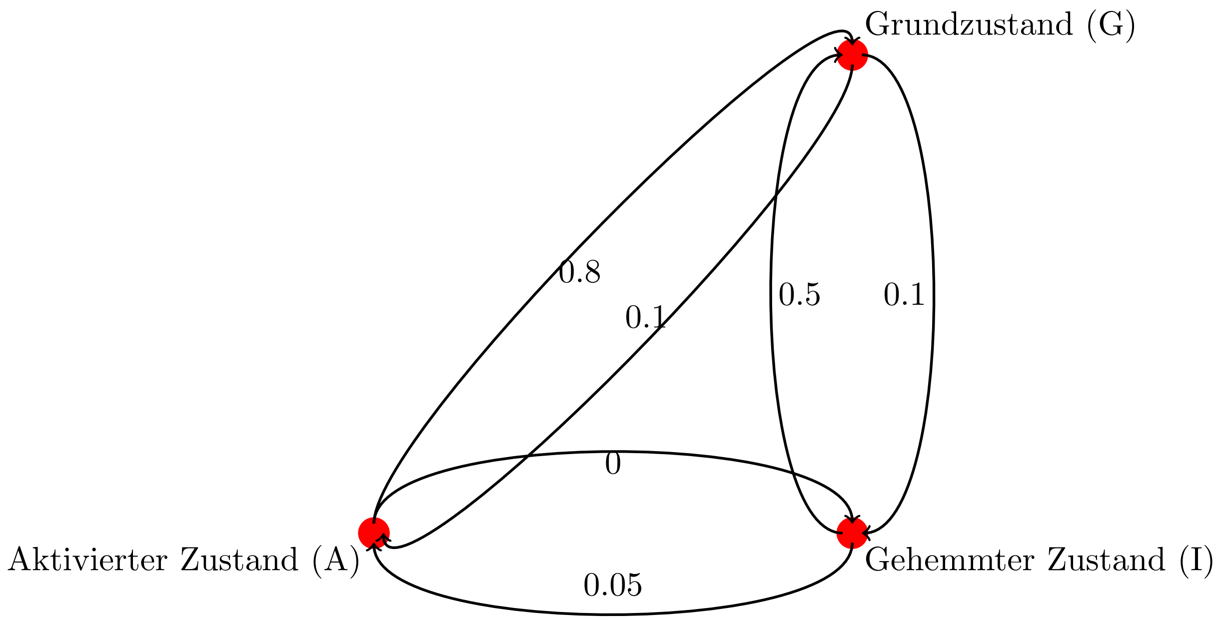

Abbildung 5.2: Skizze der verschiedenen Zustände des Proteins aus Aufgabe 5 mit Übergangswahrscheinlichkeiten.

(5b) **[2 points]** Geben Sie die Gleichung für die Markov-Kette $\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots$ an, welche die Evolution der Proteinzustände beschreibt. Nehmen Sie dabei an, dass gilt

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} G^{(k)} \\ I^{(k)} \\ A^{(k)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 ,$$

wobei $G^{(k)}$ den Anteil von Molekülen im Zustand (G) nach k Nanosekunden repräsentiert und analog $I^{(k)}$ und $A^{(k)}$ den Anteil von Molekülen in den Zuständen (I) respektive (A) nach k Nanosekunden darstellen.

Lösung:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} , \tag{5.1}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} p_{(G)\to(G)} & p_{(I)\to(G)} & p_{(A)\to(G)} \\ p_{(G)\to(I)} & p_{(I)\to(I)} & p_{(A)\to(I)} \\ p_{(G)\to(A)} & p_{(I)\to(A)} & p_{(A)\to(A)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & 0.45 & 0 \\ 0.1 & 0.05 & 0.2 \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

wobei wir die Werte auf der Diagonalen erhalten, indem wir verwenden, dass $\mathbf{A}$ eine stochastische Matrix sein muss.

(5c) **[4 points]** Welche Anteile der einzelnen Zustände liegen nach langer Zeit in stabiler Lösung vor?

Lösung: Wir suchen den Eigenraum zum Eigenwert 1, beziehungsweise den Fixpunkt der Rekursionsgleichung in (5.1).

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{A}-\mathbf{I}_3)\mathbf{x} &= \mathbf{0}\,,\\
\begin{bmatrix} -0.2 & 0.5 & 0.8 \\ 0.1 & -0.55 & 0 \\ 0.1 & 0.05 & -0.8 \end{bmatrix}\mathbf{x} &= \mathbf{0}\,,\\
\begin{bmatrix} 0.1 & -0.25 & -0.4 \\ 0 & 0.3 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} &= \mathbf{0}\,,\\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{22}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x} &= \mathbf{0}\,,
\end{aligned}
$$

Wir erhalten die Lösungsmenge

$$
\mathrm{Kern}(\mathbf{A}-\mathbf{I}_3) = \mathrm{Span}\begin{bmatrix} 22 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.
$$

Wir erhalten folglich den Wahrscheinlichkeitsvektor

$$
\frac{1}{29}\begin{bmatrix} 22 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},
$$

welcher die Anteile in stabiler Lösung beschreibt.

Aufgabe 6 Schätzen von Übertragungskanalparametern [10 points]

Gesendet wird ein zeitdiskretes Signal $x_1, x_2, \ldots, x_{m+2}$ endlicher Dauer, $x_j \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$. Nach der Übertragung empfängt man das Signal $y_1, y_2, \ldots, y_m$. Wir nehmen an, dass folgende Beziehung zwischen dem gesendeten und dem empfangenen Signal besteht:

$$y_j = \alpha x_j + \beta x_{j+1} + \gamma x_{j+2}\,, \quad j = 1, \ldots, m\,, \tag{6.1}$$

mit noch unbekannten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

(6a) [2 points] Welches überbestimmte lineare Gleichungssystem wird gemäss (6.1) von

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

erfüllt, wenn Modell- oder Messfehler ausgeschlossen werden?

Lösung: Das aus (6.1) resultierende überbestimmte lineare Gleichungssystem für $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ lautet

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & x_{m+1} & x_{m+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}. \tag{6.2}$$

(6b) [3 points] Für $k \in \{1, \ldots, m+2\}$ betrachten wir den Spezialfall des Signals $x_1, \ldots, x_{m+2}$, mit

$$x_j = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \in \{1, \ldots, m+2\} \setminus \{k\} \end{cases}.$$

Für welche $k \in \{1, \ldots, m+2\}$ ist die kleinste-Quadrate-Lösung des überbestimmten linearen Gleichungssystems aus Teilaufgabe (6a) eindeutig?

Lösung: Das überbestimmte lineare Gleichungssystem in (6.2) muss maximalen Rang, also Rang 3 haben, damit die kleinste-Quadrate-Lösung eindeutig ist. Dies gilt genau dann, wenn x_k in drei Zeilen der Koeffizientenmatrix aus (6.2) auftaucht. Also für

$$3 \leq k \leq m\,.$$

(6c) [5 points] Was sind die zugehörigen Normalengleichungen zum überbestimmten linearen Gleichungssystem aus Teilaufgabe (6a)? Geben Sie die Einträge der Koeffizientenmatrix der Normalengleichungen und die Komponenten des Rechte-Seite-Vektors der Normalengleichungen explizit in Abhängigkeit von den Daten $x_1, \ldots, x_{m+2}$ und $y_1, \ldots, y_m$ an.

Lösung: Die Normalengleichungen zu (6.2) lauten

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & x_{m+1} & x_{m+2} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & x_{m+1} & x_{m+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_m & x_{m+1} & x_{m+2} \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m x_k^2 & \sum_{k=1}^m x_k x_{k+1} & \sum_{k=1}^m x_k x_{k+2} \\ \sum_{k=1}^m x_k x_{k+1} & \sum_{k=1}^m x_{k+1}^2 & \sum_{k=1}^m x_{k+1} x_{k+2} \\ \sum_{k=1}^m x_k x_{k+2} & \sum_{k=1}^m x_{k+1} x_{k+2} & \sum_{k=1}^m x_{k+2}^2 \end{bmatrix}}_{\text{Koeffizientenmatrix}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m x_k y_k \\ \sum_{k=1}^m x_{k+1} y_k \\ \sum_{k=1}^m x_{k+2} y_k \end{bmatrix}}_{\text{Rechte-Seite-Vektor}}$$

Aufgabe 7 MATLAB: Householder Reflektionen [15 points]

Ihnen wird die MATLAB-Funktion

```
function Z = houserefl(v)
```

aus Listing 7.1 vorgelegt.

Listing 7.1: MATLAB-Funktion aus Aufgabe 7

```
1  function Z = houserefl(v)
2  % Eingabe: v:   Spaltenvektor, v in R^n \ {0}
3  n = size(v,1); % Laenge des Vektors v
4  w = v/norm(v);
5  u = w + [1;zeros(n-1,1)];
6  q = u/norm(u);
7  X = eye(n) - 2*q*q';
8  % Extrahiert die letzten n-1 Spalten von X
9  Z = X(:,2:end);
10 end
```

(7a) [3 points] Zeigen Sie, dass die Matrix $\mathbf{X}$, welche in Zeile 7 des Codes in Listing 7.1 erstellt wird, folgende Identität erfüllt:

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X} = \mathbf{I}_n \,.$$

Tipp: Es gilt $\|\mathbf{q}\|^2 = 1$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}^\top \mathbf{X} &= \big(\mathbf{I}_n - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^\top\big)\big(\mathbf{I}_n - 2\mathbf{q}\mathbf{q}^\top\big) \\
&= \mathbf{I}_n - 4\mathbf{q}\mathbf{q}^\top + 4\mathbf{q}\underbrace{\mathbf{q}^\top\mathbf{q}}_{=\|\mathbf{q}\|^2=1}\mathbf{q}^\top \\
&= \mathbf{I}_n - 4\mathbf{q}\mathbf{q}^\top + 4\mathbf{q}\mathbf{q}^\top \\
&= \mathbf{I}_n \,.
\end{aligned} \tag{7.1}$$

(7b) [4 points] Zeigen Sie, dass die erste Spalte der in der Variablen `X` gespeicherten Matrix $\mathbf{X}$ (nach Ausführung von Zeile 7 der MATLAB-Funktion `houserefl` aus Listing 7.1) ein Vielfaches des Argumentvektors $\mathbf{v}$ ist.

Tipp: Es gilt $\|\mathbf{q}\| = q_1^2 + \cdots + q_n^2 = 1$, mit $\mathbf{q} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$. Verwenden Sie weiter, dass gilt $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$, wobei $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ und folglich $\|\mathbf{w}\|^2 = 1$.

Lösung: Sei $\mathbf{X}$ die Matrix, welche in Zeile 7 des Codes aus Listing 7.1 definiert wird.

$$\mathbf{X}(:,1) = \mathbf{e}^{(1)} - 2q_1\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 1-2q_1^2 \\ -2q_1q_2 \\ \vdots \\ -2q_1q_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-2\frac{u_1^2}{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2} \\ -\frac{2u_1u_2}{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2} \\ \vdots \\ -\frac{2u_1u_n}{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2} \end{bmatrix}$$

$$\overset{\mathbf{w}=\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|},\ \mathbf{u}=\mathbf{w}+(1,0,\ldots,0)^\top}{=} \begin{bmatrix} \frac{(w_1+1)^2+w_2^2+\cdots+w_n^2-2(w_1+1)^2}{(w_1+1)^2+w_2^2+\cdots+w_n^2} \\ -\frac{2(w_1+1)w_2}{(w_1+1)^2+w_2^2+\cdots+w_n^2} \\ \vdots \\ -\frac{2(w_1+1)w_n}{(w_1+1)^2+w_2^2+\cdots+w_n^2} \end{bmatrix}$$

$$\overset{1-w_1^2=w_2^2+w_3^2+\cdots+w_n^2}{=} \begin{bmatrix} -\frac{2w_1(w_1+1)}{2(w_1+1)} \\ -\frac{2(w_1+1)w_2}{2(w_1+1)} \\ \vdots \\ -\frac{2(w_1+1)w_n}{2(w_1+1)} \end{bmatrix}$$

$$= -\mathbf{w} = -\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\,.$$

Dies ist offensichtlich ein vielfaches des Eingabevektors $\mathbf{v}$.

(7c) [3 points] Welche Eigenschaft hat die Menge der Spalten der Rückgabematrix der MATLAB-Funktion `houserefl` aus Listing 7.1? Was ist demzufolge der Zweck dieser MATLAB-Funktion?

Tipp: Sie können die Resultate der Teilaufgaben (7a) und (7b) verwenden.

Lösung: Die Spalten von $\mathbf{X}$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ (siehe Teilaufgabe (7a)). Daraus erhalten wir direkt, dass die Menge

$$\{\mathbf{X}(:,2),\ \ldots,\ \mathbf{X}(:,n)\}$$

eine ONB des orthogonalen Komplements von $\mathbf{X}(:,1)$ ist. Nach Teilaufgabe (7b) gilt, dass

$$\operatorname{Span}\mathbf{X}(:,1) = \operatorname{Span}\mathbf{v}.$$

Somit ist die Menge $\{\mathbf{X}(:,2),\ \ldots,\ \mathbf{X}(:,n)\} \overset{\text{Zeile 9, Listing 7.1}}{=} \{\mathbf{Z}(:,1),\ \ldots,\ \mathbf{Z}(:,n-1)\}$ das Orthogonale Komplement vom Eingabevektor $\mathbf{v}$ der Funktion `houserefl`.

Die Funktion berechnet also eine ONB des orthogonalen Komplements von $\mathbf{v}$!

(7d) [2 points] Was ist die asymptotische Komplexität der MATLAB-Funktion `houserefl` aus Listing 7.1 in Abhängigkeit von der Länge n des Eingabevektors für $n \to \infty$?

Lösung: $O(n^2)$, da die Bildung eines Tensorprodukts von Vektoren der Länge n benötigt wird (Zeile 7 in Listing 7.1).

(7e) **[3 points]** Ersetzen Sie Zeilen 3-7 im Code aus Listing 7.1 durch den Aufruf einer einzigen Standardfunktion von `Matlab`. Wie lautet die entsprechende Codezeile?

Lösung: Mithilfe der vorherigen Teilaufgaben erhalten wir die Antwort direkt (siehe auch Listing 7.2):

```
[X,R]=qr(v);
```

Listing 7.2: Modifizierte MATLAB-Funktion aus Aufgabe 7

```
function Z = qr_houserefl(v)
% Eingabe:
%   v:   Spaltenvektor, v in R^n\{0}
[X,R] = qr(v);
% Extrahiert die letzten n-1 Spalten von X
Z = X(:,2:end);
end
```