R. Hiptmair
S. Pintarelli
E. Spindler

Herbstsemester 2015

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Prüfung
Winter 2016

Name		Note
Vorname		
Leginummer		
Datum	05. Februar 2016	

1	2	3	4	5	Total
7P	10P	8P	11P	14P	50 P

- Bitte füllen Sie zuerst dieses Deckblatt aus.
- Legen Sie Ihre Legi auf den Tisch.
- Beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite und schreiben Sie Ihren Namen auf alle Blätter.
- Bitte nicht mit Bleistift / Rot / Grün schreiben!
- Versuchen Sie, den Lösungsweg möglichst klar darzustellen und arbeiten Sie sorgfältig!
- Prüfungsdauer: 120 Minuten.
- Zugelassene Hilfsmittel: Selbständig verfasste Zusammenfassung von maximal 20 A4 Seiten, nicht ausgedruckt, nicht kopiert.
- Schalten Sie Ihr Handy aus und legen Sie es weg.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 Ein Unterraum von Matrizen [7 points]

Für fixierte $n, m \in \mathbb{N}$ sei eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $\operatorname{Rang} \mathbf{A} = r \leq \min(m, n)$ gegeben. Wir betrachten die Menge $\mathcal{X}$:

$$\mathcal{X} := \{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,k} : \mathbf{AM} = \mathbf{O}_{m,k}\},$$

wobei $\mathbf{O}_{m,k}$ die Nullmatrix in $\mathbb{R}^{m,k}$ verkörpert.

(1a) [2 points] Zeigen Sie, dass $\mathcal{X}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^{n,k}$ ist.

Lösung:

Für beliebige $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{X}$ ist zu zeigen, dass gilt:

1. $\alpha\mathbf{X} \in \mathcal{X}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. $\mathbf{X} + \mathbf{Y} \in \mathcal{X}$.

Einsetzen in die Definition von $\mathcal{X}$ ergibt:

1. $\mathbf{A}\alpha\mathbf{X} = \alpha\mathbf{AX} = \alpha\mathbf{O}_{m,k} = \mathbf{O}_{m,k}$.
2. $\mathbf{A}(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) = \mathbf{AX} + \mathbf{AY} = \mathbf{O}_{m,k} + \mathbf{O}_{m,k} = \mathbf{O}_{m,k}$.

$\square$

(1b) [1 point] Was ist die Dimension von $\mathcal{X}$ für $k = 1$?

Tipp: Die Lösung hängt von $\operatorname{Rang} \mathbf{A}$ ab.

Lösung: Für $k = 1$ ist die Frage äquivalent zu "was ist die Dimension des Kerns von $\mathbf{A}$". Aus dem Dimensionssatz folgt: $\dim \operatorname{Kern}(\mathbf{A}) + \underbrace{\dim \operatorname{Bild}(\mathbf{A})}_{=r} = n$. $\Rightarrow \dim \operatorname{Kern}(\mathbf{A}) = n - r$.

(1c) [2 points] Was ist die Dimension von $\mathcal{X}$ für ein allgemeines $k \in \mathbb{N}$?

Lösung: Folgt direkt aus der Lösung zu Teilaufgabe (1b). Wir können die Matrizen $\mathbf{M} \in \mathcal{X}$ aus k Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \in \operatorname{Kern}(\mathbf{A})$ zusammensetzen: $\mathbf{M} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k]$. Folglich gilt

$$\dim \mathcal{X} = k \dim \operatorname{Kern}(\mathbf{A}) = k(n - r).$$

(1d) [2 points] Berechnen Sie eine Basis von $\mathcal{X}$ für $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ und k = 2.

Lösung: $\mathbf{A}$ befindet sich in Zeilenstufenform, den Kern kann man direkt ablesen:

$$\operatorname{Kern}(\mathbf{A}) = \operatorname{Span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}.$$

Daraus lässt sich leicht eine Basis für $\mathcal{X}$ für den Fall $k = 2$ zusammensetzen:

$$\mathcal{X} = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}.$$

Aufgabe 2 MATLAB: Effizientes Lösen von LGS [10 points]

Gegeben sei die MATLAB-Funktion

```
function x = pmatlgs(alpha,beta,b)
```

aus Listing 2.1. Diese Funktion berechnet den Lösungsvektor eines speziellen parameterabhängigen linearen Gleichungssystems und gibt diesen zurück.

Listing 2.1: MATLAB-Funktion aus Aufgabe 2

```
1 function x = pmatlgs(alpha,beta,b)
2 % Eingabe:
3 %   alpha, beta: reelle Parameter
4 %   b:           Spaltenvektor
5 n = numel(b);
6 v = alpha * (1:n-1)';
7 M = [0,v';v,beta*speye(n-1)];
8 x = (M*M)\b;
9 end
```

Tipp: MATLAB gibt bei der Eingabe von `help speye` folgende Ausgabe zurück:

```
speye Sparse identity matrix.
speye(M,N) and speye([M N]) form an M-by-N sparse
matrix with 1's on the main diagonal. speye(N)
abbreviates speye(N,N).
```

(2a) [4 points] Welches Gleichungssystem wird für $n = 4$ durch die MATLAB-Funktion `pmatlgs` gelöst? Geben Sie die Koeffizientenmatrix in Abhängigkeit von α, $\beta \in \mathbb{R}$ explizit an.

Lösung: Die MATLAB-Funktion löst das Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,,$$

wobei $\mathbf{b}$ der Eingabevektor ist, und $\mathbf{A} := \mathbf{M}\mathbf{M}$.

Die Matrix $\mathbf{M}$ wird in Zeile 7 des Codes aus Listing 2.1 definiert. Wir schreiben diese aus für $n = 4$.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{v}^\top \\ \mathbf{v} & \beta\mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & 3\alpha \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ 3\alpha \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 2\alpha & 3\alpha \\ \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 2\alpha & 0 & \beta & 0 \\ 3\alpha & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4\,.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{v}^\top \\ \mathbf{v} & \beta\mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{v}^\top \\ \mathbf{v} & \beta\mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{v}\|^2 & \beta\mathbf{v}^\top \\ \beta\mathbf{v} & \beta^2\mathbf{I}_{n-1} + \mathbf{v}\mathbf{v}^\top \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha^2 + 4\alpha^2 + 9\alpha^2 & \alpha\beta & 2\alpha\beta & 3\alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 + \alpha^2 & 2\alpha^2 & 3\alpha^2 \\ 2\alpha\beta & 2\alpha^2 & \beta^2 + 4\alpha^2 & 6\alpha^2 \\ 3\alpha\beta & 3\alpha^2 & 6\alpha^2 & \beta^2 + 9\alpha^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(2b) **[3 points]** Was ist die asymptotische Komplexität der Funktion `pmatlgs` aus Listing 2.1 in Abhängigkeit von Vektorlänge n von $\mathbf{b}$? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie die aufwendigste(n) Operation(en) angeben und deren Komplexität nennen.

Lösung: Wie wir in Teilaufgabe (2a) gesehen haben, ist die Matrix $\mathbf{MM}$ eine vollbesetzte Matrix, wohingegen $\mathbf{M}$ selbst eine Pfeilmatrix darstellt, also *dünnbesetzt* ist. Da wir in Zeile 8 das lineare Gleichungssystem $(\mathbf{MM})\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lösen, wobei MATLABS Backslash-Löser mit $\mathbf{MM}$ eine vollbesetzte Matrix als Eingabe erhält, ist der Rechenaufwand fürs Lösen von der Grössenordnung $\mathcal{O}(n^3)$.

(2c) **[3 points]** Welche Modifikation von Zeile 8 steigert die Effizienz beträchtlich? Begründen Sie Ihre Antwort.

Tipp: Rufen Sie sich in Erinnerung, welchen Vorteil *dünnbesetzte* Matrizen haben und nutzen Sie diesen aus!

Lösung: Wir ersetzen Zeile 8 des Codes durch

```
x = M \ M \ b;
```

Es werden somit die zwei Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} \mathbf{My} &= \mathbf{b}\,, \\ \mathbf{Mx} &= \mathbf{y}\,. \end{aligned}$$

gelöst, welche beide die *dünnbesetzte* Matrix $\mathbf{M}$ als Koeffizientenmatrix besitzen. Der Aufwand hierfür ist lediglich linear in n:

$$\mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n)\,.$$

Aufgabe 3 Berechnung der QR-Zerlegung einer 3×3-Matrix [8 points]

Gegeben ist die Matrix $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

(3a) [4 points] Berechnen Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt-Algorithmus eine Orthonormalbasis $\{\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \mathbf{q}^3\}$ von $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ für die zusätzlich gilt

$$\mathrm{Span}\{\mathbf{q}^1\} = \mathrm{Span}\{(\mathbf{A})_{:,1}\}, \quad \mathrm{Span}\{\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2\} = \mathrm{Span}\{(\mathbf{A})_{:,1}, (\mathbf{A})_{:,2}\},$$

wobei $(\mathbf{A})_{:,k}$ die k. Spalte von $\mathbf{A}$ bezeichnet.

Lösung: Wir wenden den Gram-Schmit-Algorithmus auf die Spalten von $\mathbf{A}$ an.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{q}}_1 &= (\mathbf{A})_{:,1}, \\
\mathbf{q}_1 &= \frac{\tilde{\mathbf{q}}_1}{\|\tilde{\mathbf{q}}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\tilde{\mathbf{q}}_2 &= (\mathbf{A})_{:,2} - \underbrace{\langle (\mathbf{A})_{:,2}, \mathbf{q}_1 \rangle}_{=0} \mathbf{q}_1, \\
\mathbf{q}_2 &= \frac{\tilde{\mathbf{q}}_2}{\|\tilde{\mathbf{q}}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
\tilde{\mathbf{q}}_3 &= (\mathbf{A})_{:,3} - \langle (\mathbf{A})_{:,3}, \mathbf{q}_2 \rangle \mathbf{q}_2 - \langle (\mathbf{A})_{:,3}, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 \\
&= \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} - \langle \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_2 \rangle \mathbf{q}_2 - \langle \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{q}_1 \rangle \mathbf{q}_1 \\
&= \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} - 0 \cdot \mathbf{q}_2 - \frac{3}{\sqrt{3}} \mathbf{q}_1 \\
&= \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \\
\mathbf{q}_3 &= \frac{\tilde{\mathbf{q}}_3}{\|\tilde{\mathbf{q}}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(3b) [4 points] Berechnen Sie die QR-Zerlegung von $\mathbf{A}$.

Lösung: Die Spaltenvektoren von $\mathbf{Q}$ wurden bereits in (3a) berechnet. Die Koeffizienten in $\mathbf{R}$ lassen sich ebenfalls direkt in (3a) abelesen oder durch Berechnung von $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^\top \mathbf{A}$.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

Aufgabe 4 Parameteridentifikation für stationäre Markov-Kette [11 points]

Seien $\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, mit $\sum_{i=1}^{2} x_i^{(k)} = 1$ die Wahrscheinlichkeitsvektoren einer stationären Markov-Kette für ein System mit zwei Zuständen, das heisst, es gibt Übergangswahrscheinlichkeiten $p, q \in [0, 1]$ so, dass

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(k)} . \tag{4.1}$$

(4a) [4 points] In einer Simulation beobachtet man, dass gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} . \tag{4.2}$$

Markieren Sie im p-q-Diagramm in Abbildung 4.1 diejenigen Paare (p, q) der Parameter p und q aus (4.1), welche (4.2) erfüllen.

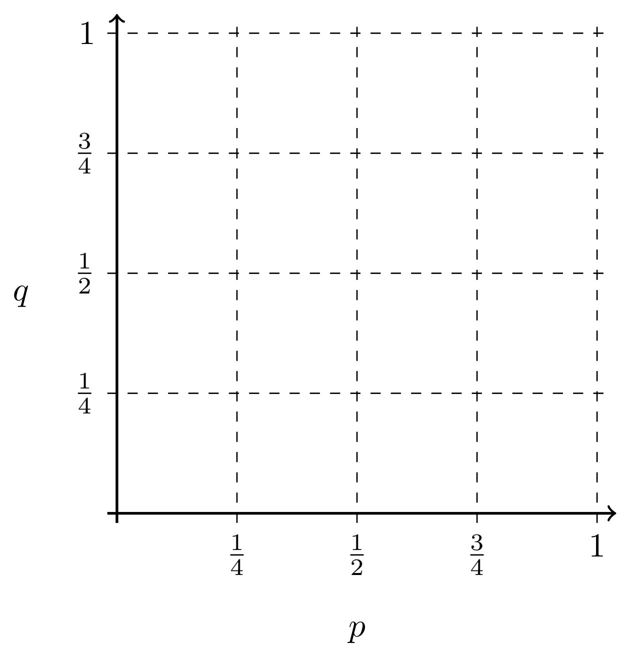

Abbildung 4.1: p-q-Diagramm für Teilaufgabe (4a).

Tipp: Benutzen Sie eine geeignete Fixpunktgleichung.

Lösung: Die lineare Rekursion in (4.1) muss erfüllen, dass

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} .$$

Folglich muss gelten $\overline{\mathbf{x}} := \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ist Fixpunkt von (4.1), bzw. $\overline{\mathbf{x}}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert 1 der Propagationsmatrix $\begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} \\
\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} 1-p-1 & q \\ p & 1-q-1 \end{bmatrix} \right) \overline{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -p & q \end{bmatrix} \overline{\mathbf{x}} &= 0 \\
\Leftrightarrow p &= 2q \,.
\end{aligned}
$$

Also ist nur möglich $p \in [0, 1]$ und $q = \frac{1}{2}p$. Zeichnen wir dies ins p-q-Diagramm ein, so erhalten wir die Lösung aus Abbildung **??**.

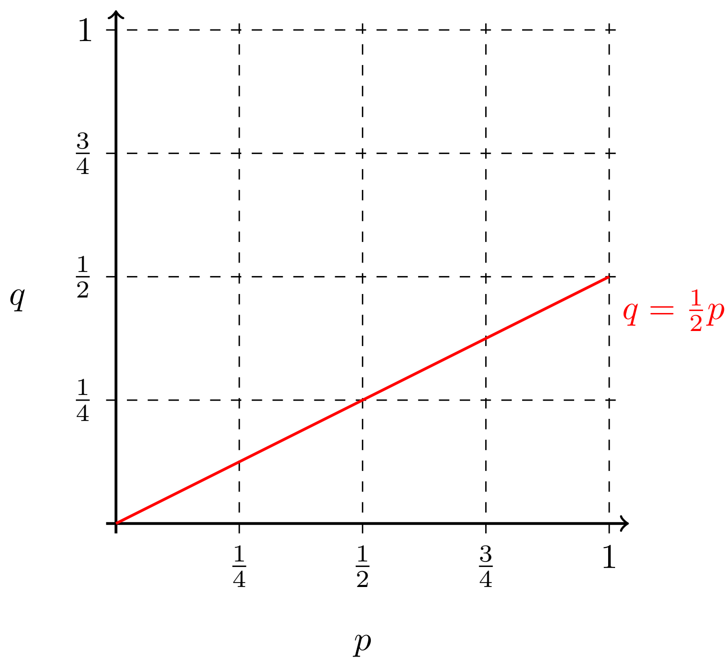

Abbildung 4.2: Lösung im p-q-Diagramm aus Aufgabe 4.

(4b) [3 points] Die ersten $m+1$ Wahrscheinlichkeitsvektoren $\mathbf{x}^{(0)}$, $\mathbf{x}^{(1)}$, $\ldots$, $\mathbf{x}^{(m)}$ der Markov-Kette seien bekannt für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Weiter seien p und q die (unbekannten) Übergangswahrscheinlichkeiten aus (4.1). Wir betrachten das aus den bekannten Wahrscheinlichkeitsvektoren resultierende *überbestimmte* lineare Gleichungssystem für $\left[\begin{smallmatrix}-p\\q\end{smallmatrix}\right]$:

$$\mathbf{A}\left[\begin{smallmatrix}-p\\q\end{smallmatrix}\right] = \mathbf{b}\,.$$

Geben Sie explizit die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2m,2}$ und den Rechte-Seite-Vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{2m}$ in Abhängigkeit von den Daten $\mathbf{x}^{(k)}$, $k \in \{0, \ldots, m\}$, an.

Tipp: Es kann hilfreich sein den Vektor

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

einzuführen, um die Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$ zu beschreiben.

Lösung: Sei $\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Die Bedingungsgleichungen für $\left[\begin{smallmatrix}-p\\q\end{smallmatrix}\right]$ aus (4.1) lauten

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(1)} &= \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)}\,, \\
\mathbf{x}^{(2)} &= \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)}\,, \\
&\vdots \\
\mathbf{x}^{(m)} &= \begin{bmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(m-1)}\,.
\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} &= \begin{bmatrix} -p & q \\ p & -q \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)}\,, \\
\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} &= \begin{bmatrix} -p & q \\ p & -q \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)}\,, \\
&\vdots \\
\mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}^{(m-1)} &= \begin{bmatrix} -p & q \\ p & -q \end{bmatrix} \mathbf{x}^{(m-1)}\,.
\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass gilt $\begin{bmatrix} -p & q \\ p & -q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\left[\begin{smallmatrix}-p & q\end{smallmatrix}\right] = \mathbf{u}\left[\begin{smallmatrix}-p & q\end{smallmatrix}\right]$ und $\left[\begin{smallmatrix}-p & q\end{smallmatrix}\right]\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)\top}\left[\begin{smallmatrix}-p\\q\end{smallmatrix}\right]$. Somit erhalten wir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}\mathbf{x}^{(0)\top} \\ \mathbf{u}\mathbf{x}^{(1)\top} \\ \vdots \\ \mathbf{u}\mathbf{x}^{(m-1)\top} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}^{(m-1)} \end{bmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrix lautet folglich

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}{\mathbf{x}^{(0)}}^\top \\ \mathbf{u}{\mathbf{x}^{(1)}}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{u}{\mathbf{x}^{(m-1)}}^\top \end{bmatrix}$$

und der Rechte-Seite-Vektor ist

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}^{(m-1)} \end{bmatrix}.$$

(4c) **[4 points]** Geben Sie die Koeffizientenmatrix und den Rechte-Seite-Vektor der Normalengleichungen zum überbestimmten linearen Gleichungssystem aus Teilaufgabe (4b) explizit an. Auch in dieser Teilaufgabe ist die Abhängigkeit der gesuchten Grössen von den Daten $\mathbf{x}^{(k)}$, $k \in \{0, \dots, m\}$, zu beachten.

Lösung: Wir betrachten die Normalengleichungen

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \begin{bmatrix} -p \\ q \end{bmatrix} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}\,.$$

Unter Verwendung von Teilaufgabe (4b) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} \mathbf{u}{\mathbf{x}^{(0)}}^\top \\ \mathbf{u}{\mathbf{x}^{(1)}}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{u}{\mathbf{x}^{(m-1)}}^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{u}{\mathbf{x}^{(0)}}^\top \\ \mathbf{u}{\mathbf{x}^{(1)}}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{u}{\mathbf{x}^{(m-1)}}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}{\mathbf{x}^{(0)}}^\top \\ \mathbf{u}{\mathbf{x}^{(1)}}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{u}{\mathbf{x}^{(m-1)}}^\top \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}^{(m-1)} \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)}\mathbf{u}^\top & \mathbf{x}^{(1)}\mathbf{u}^\top & \dots & \mathbf{x}^{(m-1)}\mathbf{u}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}{\mathbf{x}^{(0)}}^\top \\ \mathbf{u}{\mathbf{x}^{(1)}}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{u}{\mathbf{x}^{(m-1)}}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ q \end{bmatrix} \\
&\qquad = \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(0)}\mathbf{u}^\top & \mathbf{x}^{(1)}\mathbf{u}^\top & \dots & \mathbf{x}^{(m-1)}\mathbf{u}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)} \\ \vdots \\ \mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{x}^{(m-1)} \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ &\sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{x}^{(k)} \underbrace{\mathbf{u}^\top\mathbf{u}}_{=2} {\mathbf{x}^{(k)}}^\top \begin{bmatrix} -p \\ q \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{x}^{(k)}\mathbf{u}^\top \left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right) \\
\Leftrightarrow\ &2\sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{x}^{(k)} {\mathbf{x}^{(k)}}^\top \begin{bmatrix} -p \\ q \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{x}^{(k)}\mathbf{u}^\top \left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right).
\end{aligned}$$

Die Koeffizientenmatrix der Normalengleichungen lautet folglich

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = 2\sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{x}^{(k)} {\mathbf{x}^{(k)}}^\top,$$

wobei der Rechte-Seite-Vektor von folgender Form ist

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{b} = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbf{x}^{(k)} \mathbf{u}^\top \left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} \right).$$

Aufgabe 5 Diagonalisieren einer speziellen stochastischen Matrix [14 points]

Gegeben ist die folgende 3×3 Matrix $\mathbf{A}(\alpha,\beta)$ in Abhängigkeit von zwei reellwertigen Parametern α und β:

$$\mathbf{A}(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ \alpha & \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{bmatrix}, \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,.$$

(5a) [2 points] Für genau welche $\alpha,\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist $\mathbf{A}(\alpha,\beta)$ eine stochastische Matrix?

Tipp: Eine Matrix $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n,n}$ heisst *stochastisch*, sofern $(\mathbf{P})_{i,j} \in [0,1]$ für alle $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ und

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{P})_{i,j} = 1 \quad \forall j \in \{1,\ldots,n\}\,.$$

Lösung: Die Spaltensummen einer stochastischen Matrix müssen 1 ergeben. Das ergibt die Bedingung $\alpha = 1/3$. Weiter müssen die Einträge der stochastischen Matrix alle zwischen 0 und 1 liegen. Daraus erhält man die Zusatzbedingung $|\beta| \leq \frac{1}{3}$.

(5b) [3 points] Berechnen Sie die Zeilenstufenform von $\mathbf{A}(\alpha,\beta)$ für beliebige Werte $\alpha,\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Lösung: Die Zeilenstufenform von $\mathbf{A}(\alpha,\beta)$ lautet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(5c) [3 points] Seien $\alpha,\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Finden Sie Vektoren $\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ unabhängig von α und β, sodass gilt $\mathbf{A}(\alpha,\beta) = \alpha\mathbf{u}\mathbf{u}^\top + \beta\mathbf{v}\mathbf{v}^\top$.

Lösung: Man kann $\mathbf{A}$ zunächst als Summe von zwei Matrizen schreiben, von denen die erste nur von α und die zweite nur von β abhängt. Danach ist leicht ersichtlich, dass die Wahl

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

das gewünschte Ergebnis liefert.

(5d) [3 points] Seien $\alpha,\beta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Berechnen Sie das Spektrum $\sigma(\mathbf{A}(\alpha,\beta))$ von $\mathbf{A}(\alpha,\beta)$, also die Menge aller Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}(\alpha,\beta)$,

Tipp: Die Ergebnisse aus den Teilaufgaben (5b) und (5c) könnten hilfreich sein.

Lösung: Laut (5b) ist $\operatorname{Rang} \mathbf{A}(\alpha,\beta) = 2$. Somit muss $\lambda_1 = 0$ ein Eigenwert sein.

Es lässt sich leicht erkennen, dass $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ Eigenvektoren von $\mathbf{A}(\alpha,\beta)$ sind. Eigenwert zum Eigenvektor $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{A}(\alpha,\beta)\mathbf{u} = (\alpha\mathbf{u}\mathbf{u}^\top + \beta\mathbf{v}\mathbf{v}^\top)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle + \beta\mathbf{v}\underbrace{\langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle}_{=0} = 3\alpha\mathbf{u}$$

$\Rightarrow \lambda_2 = 3\alpha$.

Eigenwert zum Eigenvektor $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{A}(\alpha,\beta)\mathbf{v} = (\alpha\mathbf{u}\mathbf{u}^\top + \beta\mathbf{v}\mathbf{v}^\top)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}\underbrace{\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle}_{=0} + \beta\mathbf{v}\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = 2\beta\mathbf{v}$$

$\Rightarrow \lambda_3 = 2\beta$.

Alternative: charakteristisches Polynom bestimmen.

(5e) **[3 points]** Diagonalisieren Sie $\mathbf{A}(\alpha,\beta)$, das heisst berechnen Sie eine invertierbare Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und eine Diagonalmatrix $\mathbf{D}(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^{3,3}$, sodass $\mathbf{A}(\alpha,\beta)\mathbf{S} = \mathbf{S}\mathbf{D}(\alpha,\beta)$.

Tipp: Das Resultat von (5d) erleichtert die Diagonalisierung. Weiter hängt $\mathbf{S}$ nicht von den Parametern α und β ab.

Lösung: Wurden die Eigenvektoren bereits in einer vorherigen Teilaufgabe berechnet, so werden sie hier gewertet.

$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}(\alpha,\beta)) = \mathrm{Span}\{\left[\begin{smallmatrix}-2\\1\\1\end{smallmatrix}\right]\}$. somit ist $\left[\begin{smallmatrix}-2\\1\\1\end{smallmatrix}\right]$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$.

Mit den Ergebnissen aus Teilaufgabe (5d) ergibt sich für $\mathbf{S}$ und $\mathbf{D}(\alpha,\beta)$ ohne grossen Rechenaufwand:

$$\mathbf{D}(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix}0 & & \\ & 3\alpha & \\ & & 2\beta\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S} = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Kontrolle: Die Matrix $\mathbf{A}(\alpha,\beta)$ ist symmetrisch, also diagonalisierbar, und die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal.