P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 10

Aufgabe 10.1 Skalarprodukt und Orthogonalität

10.1a) Bezüglich des euklidischen Skalarprodukts in $\mathbb{R}^2$ ist die Orthogonalprojektion von $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ der Vektor $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

(i) richtig

(ii) falsch

10.1b) $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist eine orthogonale Matrix genau dann, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ bezüglich des euklidischen Skalarprodukts bilden.

(i) richtig

(ii) falsch

10.1c) Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Stimmt es, dass das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren beliebig gross sein kann?

(i) richtig

(ii) falsch

10.1d) Wir betrachten wieder $\mathbb{R}^n$ mit dem euklidischen Skalarprodukt. Können wir beliebig viele paarweise orthogonale Einheitsvektoren in diesem Vektorraum finden?

(i) richtig

(ii) falsch

Aufgabe 10.2 Gram-Schmidt Algorithmus

10.2a) Gegeben seien die drei Vektoren

$$\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens aus $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{a}^{(3)}$ eine orthonormale Basis $\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)}$. Benützen Sie das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^3$.

10.2b) Finden Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3 des Vektors

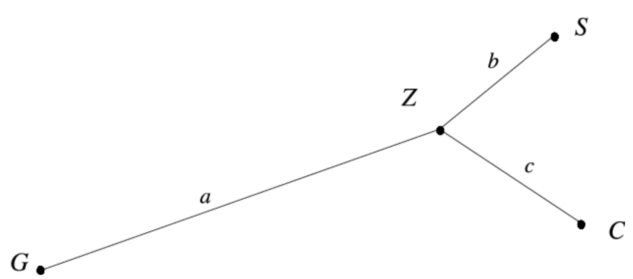
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bezüglich der in a) berechneten orthonormalen Basis $\mathbf{b}^{(1)},\ \mathbf{b}^{(2)},\ \mathbf{b}^{(3)}$, d.h.

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{b}^{(1)} + x_2\mathbf{b}^{(2)} + x_3\mathbf{b}^{(3)}.$$

Aufgabe 10.3 Velofahrer (Ausgleichsrechnung)

Ein trainierter Velofahrer fährt innerhalb einer Woche zwischen den Städten Zürich (Z), Chur (C), St. Gallen (S) und Genf (G) immer auf denselben Wegen hin und her. Dabei radelt er stets über Zürich. Er liest auf seinem Velocomputer folgende Distanzen ab:



Z–G	S–G	G–C	C–S	Z–C
280	390	400	210	118

Es fällt ihm auf, dass die Strecke G–C nicht der Summe der Strecken Z–G und Z–C entspricht und interessiert sich nun für die tatsächlichen Distanzen a, b, c.

10.3a) Lesen Sie für ihn alle Gleichungen für die Längen $a,\ b,\ c$ der Teilstrecken Z–G, Z–S, Z–C ab und schreiben Sie diese in der Form $\mathbf{A}(a, b, c)^\top = \mathbf{b}$.

10.3b) Zeigen Sie, dass die beste approximative Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate gegeben ist durch $a^* = \frac{1711}{6}$, $b^* = \frac{301}{3}$ und $c^* = \frac{685}{6}$.

10.3c) Wir nehmen nun an, dass die exakten Distanzen $a,\ b,\ c$ gleich $a^*,\ b^*,\ c^*$ aus 10.3b) sind. Welchen absoluten Fehler hat dann der Velocomputer in den fünf obigen Fahrten jeweils gemacht?

Aufgabe 10.4 Betrachtung einer linearen Abbildung

In dieser Aufgabe üben wir das Konzept der linearen Abbildung aus Abschnitt 5 der Vorlesung und ihrer Matrixdarstellung an einem einfachen Beispiel.

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie die folgende Selbstabbildung F von $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \overset{\mathsf{F}}{\mapsto} \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} .$$

10.4a) Interpretieren Sie diese Abbildung geometrisch, das heisst, beschreiben Sie wie sie auf Punkte in der Ebene wirkt.

10.4b) Zeigen Sie: F ist eine lineare Abbildung.

Tipp: Dazu müssen Sie nur die Eigenschaften aus der Definition einer lineare Abbildung verifizieren.

10.4c) Durch welche Matrix $\mathbf{A}$ wird F bezüglich der kartesischen Basis aus Einheitsvektoren beschrieben?

Tipp: Schauen Sie sich den Beweis des Satzes, der aussagt, dass jede lineare Abbildung als Matrixmultiplikation beschrieben werden kann, nochmals an.

Aufgabe 10.5 Das Kreuzprodukt als lineare Abbildung

Oft findet man lineare Abbildung nicht beschrieben durch eine Matrix sondern durch andere Operationen. In diesem Beispiel betrachten wir für $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ die Abbildung

$$\mathsf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad \mathsf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \times \mathbf{x} ,$$

wobei $\times$ für das Vektorprodukt steht.

10.5a) Zeigen Sie, dass es sich bei F um eine lineare Abbildung handelt.

10.5b) Was ist die Matrixdarstellung von F bezüglich der kartesischen Basis aus Einheitsvektoren? Welche besondere Eigenschaft sehen Sie dieser Matrix sofort an?

Tipp: Erinnern Sie sich daran, dass man dazu zuerst die Bilder der Basisvektoren unter F bestimmen muss und dann deren Koordinaten. Das liefert die Spalten der Darstellungsmatrix.

10.5c) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\mathsf{F})$.

Tipp: Den Nullraum kann man F direkt "ansehen" oder auch einfach dadurch bestimmen, dass man den Kern der Darstellungsmatrix ausrechnet.

10.5d) Was ist $\mathrm{Rang}(\mathsf{F})$?

10.5e) Berechnen Sie $\langle \mathbf{x}, \mathsf{F}(\mathbf{x}) \rangle$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, wobei $\langle , \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Aufgabe 10.6 Geometrische Interpretation einer linearen Abbildung

Gegeben sei ein *Einheits*vektor $\mathbf{v}$ des $\mathbb{R}^3$, d. h. $\|\mathbf{v}\| = 1$. Die 3×3 Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{H}$ seien definiert durch

$$\mathbf{A} := \mathbf{v}\mathbf{v}^\top, \qquad \mathbf{P} := \mathbf{I}_3 - \mathbf{v}\mathbf{v}^\top, \qquad \mathbf{H} := \mathbf{I}_3 - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top,$$

wobei $\mathbf{I}_3$ die 3×3-Einheitsmatrix bezeichnet.

10.6a) Berechnen Sie $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{H}^2$.

10.6b) Die Matrizen $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}$ und $\mathbf{H}$ definieren lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 &\longmapsto \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{P} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 &\longmapsto \mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \\ \mathcal{H} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 &\longmapsto \mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Beschreiben Sie die Abbildungen $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{H}$ geometrisch.

Tipp: Zerlegen Sie dazu den Vektor $\mathbf{x}$ in je eine Komponente orthogonal und parallel zu $\mathbf{v}$, d. h. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\perp + \mathbf{x}_\parallel$ mit $\mathbf{x}_\parallel = (\mathbf{x}, \mathbf{v})\mathbf{v}$ und $\mathbf{x}_\perp = \mathbf{x} - \mathbf{x}_\parallel$.

Veröffentlichung am 24. November 2015.

Abzugeben bis 2. Dezember 2015.