P. Grohs
T. Welti
F. Weber

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 11

Aufgabe 11.1 Unterräume bestimmen

In der Vorlesung wurde kurz angetönt, was ein Vektorraum ganz allgemein ist: Ein Vektorraum V ist eine Menge, die mit einer Addition und einer Skalarmultiplikation versehen ist, welche gewisse Kompatibilitätseigenschaften erfüllen (z.B. die Assoziativität und Kommutativität der Addition oder Distributivgesetze). Diese zwei Vorschriften erlauben es, Elemente des Vektorraums zu addieren und mit einem Skalar (einer "Zahl") zu multiplizieren. Dabei ist es möglich, auf derselben Menge verschiedene Vektorraumstrukturen (das heisst, verschiedene Additionen und Skalarmultiplikationen) zu definieren. Manchmal schreibt man deshalb $(V, +, \cdot)$ anstatt nur V, wobei die Operationen $+$ und $\cdot$ vorgängig definiert wurden, um klarer darzustellen, welcher Vektorraum gemeint ist.

Sind die folgenden Untermengen des $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume des Vektorraums $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ (wobei $+$ und $\cdot$ hier die gewöhnliche Addition und Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^3$ bezeichnen)?

11.1a) Die Ebene $\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : v_1 = v_2 \right\}$.

11.1b) Die Ebene $\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : v_1 = 1 \right\}$.

11.1c) Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 = 0 \right\}$.

11.1d) Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : v_1 + v_2 + v_3 = 0 \right\}$.

11.1e) Die Menge $\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : v_1 \leq v_2 \leq v_3 \right\}$.

11.1f) Die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren $\mathbf{v} = (1, 4, 0)^\top$ and $\mathbf{w} = (2, 2, 3)^\top$.

Im Folgenden betrachten wir den Vektorraum $C(\mathbb{R}) = (C(\mathbb{R}), +, \cdot)$, den Vektorraum der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Für zwei stetige Funktionen $f, g \in C(\mathbb{R})$ ist die Additionsvorschrift $+$ wie gewöhnlich punktweise definiert:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ebenso ist die skalare Multiplikationsvorschrift $\cdot$ für einen Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$ und eine stetige Funktion $f \in C(\mathbb{R})$ punktweise gegeben:

$$(\alpha \cdot f)(x) := \alpha \cdot f(x), \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Ausserdem betrachten wir den Unterraum $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = (\mathcal{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ von $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$, welcher der Menge aller Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich n entspricht. Insbesondere erbt $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ die Addition und Skalarmultiplikation von $C(\mathbb{R})$. Es lässt sich sehr schnell überprüfen, dass $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ ein Unterraum von $C(\mathbb{R})$ ist.

11.1g) Ist $\left\{f \in C(\mathbb{R}) : \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\right\}$ ein Untervektorraum von $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$?

11.1h) Ist $\{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(0) = 1\}$ ein Untervektorraum von $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$?

11.1i) Ist $\{p \in \mathcal{P}_7(\mathbb{R}) : p(0) = 2p'(0)\}$ ein Untervektorraum von $(\mathcal{P}_7(\mathbb{R}), +, \cdot)$?

Aufgabe 11.2 Vektorraum der Polynome

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit dem Vektorraum $\mathcal{P}_2([-1,1])$ der Polynome auf $[-1,1]$ vom Grad kleiner oder gleich 2, vergleiche mit Aufgabe 11.1.

Sei $\mathcal{A} = \{a^{(1)} := 1,\ a^{(2)} := 1 + 2x,\ a^{(3)} := x^2 + x - 1\} \subseteq \mathcal{P}_2([-1,1])$.

11.2a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Basis von $\mathcal{P}_2([-1,1])$ ist.

11.2b) Sei $p(x) \coloneqq 5x^2 + x - 3 \in \mathcal{P}_2([-1,1])$. Finden Sie die Koordinaten von p bezüglich der Basis $\mathcal{A}$.

11.2c) Auf $\mathcal{P}_2([-1,1])$ ist durch

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für alle } f, g \in \mathcal{P}_2([-1,1])$$

ein Skalarprodukt definiert. Bestimmen Sie alle Vektoren aus $\mathcal{P}_2([-1,1])$, welche bezüglich diesem Skalarprodukt senkrecht auf $a^{(1)}$ stehen.

11.2d) Konstruieren Sie mit Hilfe des Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahrens aus $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ eine orthonormale Basis von $\mathcal{P}_2([-1,1])$ bezüglich des Skalarprodukts aus Teilaufgabe 11.2c).

Aufgabe 11.3 Multiple Choice: Linearität von Abbildungen

Entscheiden Sie bei den folgenden neun Abbildungen, ob diese linear sind oder nicht, und geben Sie eine Begründung an.

11.3a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y)^\top \mapsto (x+y, 2x, 0)^\top$

(i) f ist linear

(ii) f ist nicht linear

11.3b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y)^\top \mapsto (x + y, 2x, 1)^\top$

(i) f ist linear

(ii) f ist nicht linear

11.3c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(i) f ist linear

(ii) f ist nicht linear

11.3d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 0$

(i) f ist linear

(ii) f ist nicht linear

11.3e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f die Identität

(i) f ist linear

(ii) f ist nicht linear

11.3f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$

(i) f ist linear

(ii) f ist nicht linear

11.3g) $f : C^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ h \mapsto h''(0)$ (Hier bezeichnet $C^2(\mathbb{R})$ die Menge aller zweimal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$.)

(i) f ist linear

(ii) f ist nicht linear

11.3h) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, f beschreibt die Spiegelung an der Geraden $y = x + 1$

(i) f ist linear

(ii) f ist nicht linear

11.3i) $f : \mathbb{R}^2 \to C^\infty(\mathbb{R}),\ (x,y)^\top \mapsto h$, wobei h diejenige Linearkombination der Funktionen $\sin$ und $\cos$ ist, deren Graph durch die Punkte $(-1,x)$ und $(1,y)$ geht. (Hier bezeichnet $C^\infty(\mathbb{R})$ die Menge aller unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$.)

(i) f ist linear

(ii) f ist nicht linear

Aufgabe 11.4 Abbildungsmatrizen

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass jede lineare Abbildung (zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen) als Matrix dargestellt werden kann. In dieser Aufgabe erhalten Sie drei Beispiele von linearen Selbstabbildungen auf dem $\mathbb{R}^3$, deren Abbildungsmatrizen bezüglich der Standerbasis im $\mathbb{R}^3$ Sie bestimmen sollen.

11.4a) Seien E_1, E_2 und E_3 die Punkte $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ im $\mathbb{R}^3$ und seien M_1, M_2 und M_3 die Mittelpunkte der Strecken $\overline{E_1E_2}$, $\overline{E_2E_3}$ und $\overline{E_3E_1}$.

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis der linearen Abbildung $\mathcal{F}$, welche E_i nach M_i, $i = 1,2,3$, abbildet. Bestimmen Sie ausserdem alle Fixpunkte von $\mathcal{F}$, das heisst, alle Punkte P mit $\mathcal{F}(P) = P$.

11.4b) Sei $\mathbf{p} = (1,2,2)^\top$. Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich der Standardbasis der Abbildung $\mathcal{G}$, welche jeden Punkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ orthogonal auf $\mathbf{p}$ projiziert (stellen Sie zuerst fest, dass $\mathcal{G}$ wirklich eine lineare Abbildung definiert).

11.4c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix bezüglich der Standarbasis von derjenigen Abbildung, die für jeden Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung $\mathcal{F}$ (siehe Teilaufgabe 11.4a)) auf die orthogonalen Projektion des Vektors $\mathbf{x}$ auf den Vektor $\mathbf{p}$ (siehe Teilaufgabe 11.4b)) anwendet.

Aufgabe 11.5 Abbildungsmatrix einer Polynomabbildung

Sei $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Grad kleiner oder gleich 3, vergleiche mit Aufgabe 11.1. Gegeben sei folgende Abbildung:

$$\mathcal{F}\colon \begin{array}{rcl} \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \\ p(x) & \mapsto & p''(x) + xp'(x) \end{array}$$

11.5a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine lineare Abbildung ist.

11.5b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathbf{K}_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$ bezüglich der Standardbasis des $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, der Monombasis $\mathcal{B}_1 := \{1, x, x^2, x^3\}$.

11.5c) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathbf{K}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}(\mathcal{F})$ von $\mathcal{F}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2 := \{1 + x^3, x - x^2, x^2 + x^3, x^3\} \subseteq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Tipp: Sie können diese Aufgabe mithilfe von Basiswechselmatrizen lösen.

Aufgabe 11.6 Polynomielle Projektion

In dieser Aufgabe betrachten wir erneut die Polynomräume $\mathcal{P}_d([-1,1])$ für $d \in \mathbb{N}$. Er ist ausgestattet mit dem *Skalarprodukt*

$$\langle p, q\rangle := \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\,\mathrm{d}t, \quad \text{für alle } p, q \in \mathcal{P}_d([-1,1])$$

(Achtung: Es unterscheidet sich vom Skalarprodukt in Aufgabe 11.2.) und der *Monombasis*

$$\{t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, \ldots, t \mapsto t^d\}.$$

Weiter seien die linearen Abbildungen $\mathcal{L}_d : \mathcal{P}_d([-1,1]) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\mathcal{L}_d(p) = \begin{pmatrix} p(-1) \\ p(1) \end{pmatrix}, \quad p \in \mathcal{P}_d([-1,1]).$$

Schliesslich sind die ersten drei der sogenannten *Legendre-Polynome* gegeben durch

$$P_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad P_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t, \quad P_2(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3t^2 - 1).$$

Wir betrachten nun Konzepte, wie sie im Zusammenhang mit der Diskussion linearer Abbildungen in der Vorlesung besprochen worden sind, für diesen Polynomraum.

11.6a) Geben Sie die Matrixdarstellung $\mathbf{K}^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathcal{L}_2)$ von $\mathcal{L}_2$ bezüglich der monomialen Basis $\mathcal{B}$ von $\mathcal{P}_2([-1,1])$ und der Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^2$ an.

11.6b) Zeigen Sie, dass $\{P_0, P_1, P_2\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{P}_2([-1,1])$ ist.

11.6c) Bestimmen Sie nun die Matrixdarstellung $\mathbf{K}^{\mathcal{E}}_{\tilde{\mathcal{B}}}(\mathcal{L}_2)$ von $\mathcal{L}_2$ bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}} = \{P_0, P_1, P_2\}$ von $\mathcal{P}_2([-1,1])$ und der Standardbasis $\mathcal{E}$ des $\mathbb{R}^2$.

11.6d) Der *Rang* einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V und W ist definiert als die Dimension ihres Bildes $f(V)$ als Unterraum von W. Er entspricht dem Rang jeder zugehörigen Abbildungsmatrix. Was ist für allgemeines d der Rang von $\mathcal{L}_d$? Begründen Sie Ihre Antwort.

11.6e) Zeigen Sie, dass für $d \geq 2$

$$\mathcal{B}_{\text{Kern}} = \{t \mapsto 1 - t^2, t \mapsto t(1-t^2), t \mapsto t^2(1-t^2), \ldots, t \mapsto t^{d-2}(1-t^2)\}$$

eine Basis von $\operatorname{Kern}(\mathcal{L}_d)$ ist.

Tipp: Bestimmen Sie zunächst $\dim \operatorname{Kern}(\mathcal{L}_d)$ mithilfe der Dimensionsformel und Teilaufgabe 11.6d). Zeigen Sie dann, dass $\mathcal{B}_{\text{Kern}}$ im Kern enthalten und linear unabhängig ist.

11.6f) Berechnen Sie für die Vektoren $t \mapsto t^n \in \mathcal{P}_d([-1,1])$, $n \in \{0,1,\ldots,d\}$, die jeweiligen Orthogonalprojektionen auf $\mathcal{P}_2([-1,1])$.

Tipp: Verwenden Sie, dass sich die Orthogonalprojektion wegen dem Resultat aus Teilaufgabe 11.6b) einfach berechnen lässt.

Veröffentlichung am 1. Dezember 2015.

Abzugeben bis 9. Dezember 2015.