P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

ETH Zürich
D-MATH

Serie 13

Diese letzte Serie des Semesters befasst sich noch einmal mit wichtigen Themen wie Eigenwerte, Eigenvektoren und Diagonalisierbarkeit. Aufgabe 13.2 enthält übrigens eine freiwillige Teilaufgabe mit MATLAB. Sie soll Ihnen exemplarisch aufzeigen, dass die meisten Rechenaufgaben aus allen Serien sehr einfach mit MATLAB zu überprüfen beziehungsweise nachzurechnen sind. In der Praxis wird ein lineares Gleichungssystem zum Beispiel kaum mittels Gaussverfahren von Hand gelöst; der Backslash-Operator '\' in MATLAB erledigt dies viel schneller. Zusätzlich löst dieser Operator auch noch lineare Ausgleichsprobleme. Somit sei Ihnen hiermit nahegelegt, sich mit MATLAB vertraut zu machen (falls Sie es nicht schon sind).

Aufgabe 13.1 Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter. Wir betrachten die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Eigenwerte und Eigenvektoren dieser Matrix zu bestimmen.

13.1a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom der gegebenen Matrix $\mathbf{A}$.

Tipp: Die Determinante einer 3×3-Matrix berechnet man zum Beispiel mit der Formel von Sarrus.

13.1b) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$.

Tipp: Verwenden Sie Teilaufgabe 13.1a).

Tipp: Versuchen Sie einen der Eigenwerte direkt zu erkennen, indem Sie die Matrix genauer anschauen. Ein Eigenvektor sollte Ihnen direkt ins Auge springen. Faktorisieren Sie $(\lambda - \beta)$ mithilfe der Polynomdivision aus dem charakteristischen Polynom, wobei β den Eigenwert zu diesem Eigenvektor darstellt.

13.1c) Berechnen Sie alle Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$. Oder mit anderen Worten: Geben Sie eine Basis für jeden Eigenraum an.

Tipp: Per Definition erhalten Sie die Eigenvektoren, indem Sie für $i \in \{1, 2, 3\}$ die Eigenräume $\mathrm{Kern}(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_3)$ berechnen, wobei λ_i den jeweiligen Eigenwert repräsentiert. Basen der Kerne der Matrizen $\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, berechnen Sie wie gewohnt, indem Sie sie zuerst auf Zeilenstufenform bringen.

13.1d) Diagonalisieren Sie $\mathbf{A}$, das heisst, geben Sie eine invertierbare Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{3,3}$ und eine Diagonalmatrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3,3}$ an, so dass $\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{D}\mathbf{S}^{-1}$ gilt. Beachten Sie, dass es möglich ist, solche reellen Matrizen $\mathbf{S}$ und $\mathbf{D}$ zu finden, weil die Matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch ist.

Aufgabe 13.2 Eigenwertberechnung

13.2a) Lösen Sie das Eigenwertproblem für die folgende Matrix, das heisst, bestimmen Sie alle Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten, sowie die zugehörigen Eigenräume mit den geometrischen Vielfachheiten:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -5 & -5 \\ -2 & 9 & 5 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

13.2b) Lösen Sie das Eigenwertproblem für die folgende Matrix:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}.$$

13.2c) Überprüfen Sie Ihre Resultate von den Teilaufgaben 13.2a) und 13.2b) in MATLAB.

Tipp: In MATLAB gibt der Befehl `[V,D] = eig(C)` die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{n,n}$ in der Diagonalen von $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n,n}$ und zugehörige Eigenvektoren in den Spalten von $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n,n}$ zurück.

Aufgabe 13.3 Diagonalisierbarkeit

13.3a) Diagonalisieren Sie, falls möglich, die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3,3}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2,2}.$$

13.3b) Kann man für diejenigen Matrizen, die diagonalisierbar sind, die entsprechenden Transformationsmatrizen $\mathbf{S}$ orthogonal (beziehungsweise unitär) wählen? Wenn ja, geben Sie ein solches $\mathbf{S}$ an.

Aufgabe 13.4 Anwendungen von Diagonalisierbarkeit

Diese Aufgabe soll aufzeigen, wie die Diagonalisierbarkeit einer Matrix verwendet werden kann, um zum Beispiel ihr Matrixexponential zu berechnen. Erinnern Sie sich daran, dass für eine diagonalisierbare Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\mathbf{S}^{-1} \in \mathbb{C}^{n,n}$ und eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit konvergenter Taylorreihe (insbesondere zum Beispiel Polynome oder die Exponentialfunktion) die Beziehung

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))\mathbf{S}^{-1} \in \mathbb{C}^{n,n}$$

gilt. Im Folgenden betrachten wir die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

13.4a) Überprüfen Sie, dass $\mathbf{A}$ die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 8$ hat und die entsprechenden Eigenräume durch

$$E_2 = \mathrm{Kern}(\mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{I}_3) = \mathrm{span}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right\}, \quad E_8 = \mathrm{Kern}(\mathbf{A} - 8 \cdot \mathbf{I}_3) = \mathrm{span}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\}$$

gegeben sind.

13.4b) Berechnen Sie das Matrixexponential $e^{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{3,3}$ von $\mathbf{A}$.

13.4c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p_{\mathbf{A}}$ von $\mathbf{A}$ und berechnen Sie $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$. Geben Sie eine Erklärung für das Ergebnis an.

Bemerkung: Die Beobachtung, die Sie hier machen, gilt für beliebige (auch nicht diagonalisierbare) quadratische Matrizen.

13.4d) Berechnen Sie mithilfe von Teilaufgabe 13.4c) die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A}$.

13.4e) Berechnen Sie für einen Paramter $x \in \mathbb{C}$ die Inverse der Matrix

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4,4},$$

indem Sie verwenden, dass der Ausruck für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} y^n = (1-y)^{-1}$ (wobei $y \in \mathbb{C}$ mit $|y| < 1$) für zulässige Matrixargumente auch gilt.

Tipp: Schreiben Sie $\mathbf{X}$ als $\mathbf{X} = \mathbf{I}_4 - \mathbf{Y}$ für ein $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{4,4}$, berechnen Sie Potenzen von $\mathbf{Y}$ und verwenden Sie, dass $\mathbf{Y}$ ein zulässiges Argument für die geometrische Reihe ist.

Aufgabe 13.5 Eigenwerte einer linearen Polynomabbildung

Sei $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ wie gewohnt der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner gleich 3. Wir betrachten die lineare Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, die für alle $p(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ durch $\mathcal{F}(p(x)) = p(x) - p'(x)$ gegeben ist. Welche der folgenden Behauptungen ist richtig? $\mathcal{F}$ hat den Eigenwert…

(i) 0 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 4.

(ii) 0 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 1.

(iii) 1 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 4.

(iv) 1 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 1.

Tipp: Eigenwerte und Eigenvektoren einer allgemeinen linearen Abbildung $\mathcal{L}\colon V \to V$ auf einem Vektorraum V sind ganz analog zu denjenigen von Matrizen definiert: Eine Zahl λ heisst Eigenwert von $\mathcal{L}$, falls es einen Vektor (in der obigen Fragestellung ein Polynom) $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ gibt, so dass $\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \lambda \cdot \mathbf{v}$. Ein solcher Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ heisst dann Eigenvektor zum Eigenwert λ. In der vorliegenden Aufgabe mag es wie so oft sinnvoll sein, den Polynomraum $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ mit dem $\mathbb{R}^4$ zu identifizieren, und dann die Eigenwerte und Eigenvektoren der entsprechenden Abbildungsmatrix zu bestimmen.

Aufgabe 13.6 Fibonacci-Zahlen

Angeregt durch die berühmte Kaninchenaufgabe von Leonardo von Pisa (1170–1250), genannt Fibonacci, befassen wir uns mit der vorliegenden Aufgabe.

Annahme: Neugeborene Kaninchenpaare bringen nach dem ersten und dem zweiten Monat ihres Lebens jeweils ein neues Kaninchenpaar zur Welt und stellen dann die weitere Fortpflanzung ein.

Sei x_n die Anzahl der im Monat n neugeborenen Kaninchenpaare, wobei wir $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ setzen. Nach obiger Annahme bringen im Monat n die im Monat $n-1$ und Monat $n-2$ neugeborenen Kaninchenpaare je ein neues Kaninchenpaar zur Welt. Die Anzahl der neugeborenen Kaninchenpaare im Monat n ist also die Summe der Anzahl der neugeborenen Kaninchenpaare in den Monaten $n-1$ und $n-2$. Die Folge $x_n, n \in \mathbb{N}_0$, erfüllt also

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1$$

sowie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Rekursion

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \tag{13.6.1}$$

und entspricht somit der berühmten Folge der Fibonacci-Zahlen. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, wie es mithilfe der linearen Algebra möglich ist, eine explizite Formel für die n-te Fibonaccizahl anstelle der Rekursion (13.6.1) herzuleiten.

13.6a) Finden Sie eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$, welche die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Wie hängt $\left(\begin{smallmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{smallmatrix}\right)$ von $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ x_1 \end{smallmatrix}\right)$ ab? Finden Sie einen Ausdruck in Abhängigkeit von $\mathbf{A}$.

Die Idee ist nun, beliebige Anfangsbedingungen

$$\mathbf{0} \neq \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

zu betrachten und ein solches $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ zu suchen, für welches man $\mathbf{A}^n\mathbf{z}$ einfach berechnen kann.

13.6b) Am einfachsten wäre $\mathbf{A}^n\mathbf{z}$ zu berechnen, wenn $\mathbf{Az} = \mathbf{z}$ gilt, denn dann ist $\mathbf{A}^n\mathbf{z} = \mathbf{z}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $\mathbf{Az} = \mathbf{z}$ ein lineares Gleichungssystem ist, welches nur die Lösung $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ besitzt.

13.6c) Ebenfalls lässt sich $\mathbf{A}^n\mathbf{z}$ einfach berechnen, falls $\mathbf{Az} = \lambda\mathbf{z}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Was ist dann $\mathbf{A}^n\mathbf{z}$?

13.6d) Finden Sie zwei Werte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so dass das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Az} = \lambda\mathbf{z}$ Lösungen $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ hat.

13.6e) Finden Sie zu den in 13.6d) gefundenen Werten λ_1, λ_2 je auch ein $\mathbf{z}^{(1)}, \mathbf{z}^{(2)} \neq \mathbf{0}$, mit

$$\mathbf{Az}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{z}^{(i)}, \quad i = 1, 2.$$

13.6f) Verwenden Sie nun die vorherigen Teilaufgaben, um für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ eine explizite Formel für den Vektor $\left(\begin{smallmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{smallmatrix}\right)$ herzuleiten.

13.6g) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

Veröffentlichung am 15. Dezember 2015.

Keine Abgabe.