P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 6

Aufgabe 6.1 Rechnen mit 3×3-Matrizen

In dieser kurzen Aufgabe geht es darum, dass Sie an einem einfachen Zahlenbeispiel die Matrixmultiplikation üben.

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} . \tag{6.1.1}$$

Berechnen Sie den Ausdruck $(\mathbf{A} + \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I}) \in \mathbb{R}^{3,3}$.

Aufgabe 6.2 Zerlegung einer Matrix in symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil

In der Vorlesung haben Sie bereits die Definition einer *symmetrischen* Matrix kennengelernt: Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ heisst symmetrisch, falls $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$. Analog heisst eine quadratische Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *schiefsymmetrisch*, falls $\mathbf{B} = -\mathbf{B}^\top$ gilt.

In dieser Aufgabe wollen wir Sie darauf aufmerksam machen, dass man jede beliebige Matrix in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Anteil aufteilen kann.

Für eine beliebige quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ definieren wir

$$\mathbf{S} := \frac{1}{2}\big(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top\big), \qquad \mathbf{K} := \frac{1}{2}\big(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top\big) \in \mathbb{R}^{n,n} . \tag{6.2.1}$$

6.2a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{S}$ eine symmetrische Matrix ist.

6.2b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{K}$ eine schiefsymmetrische Matrix ist.

6.2c) Zeigen Sie, dass $\mathbf{S} + \mathbf{K} = \mathbf{A}$ gilt.

Aufgabe 6.3 Lineare Unabhängigkeit und Erzeugendensysteme

Bestimmen Sie in den folgenden vier Fällen mithile des Gaussverfahrens und durch Bestimmung des Rangs geeigneter Matrizen, ob die Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind und ob sie Erzeugendensysteme des $\mathbb{R}^3$, beziehungsweise des $\mathbb{R}^4$, bilden:

6.3a) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};$

6.3b) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix};$

6.3c) $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix};$

6.3d) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$

Aufgabe 6.4 Auswahl einer Basis

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass eine Menge von erzeugenden und linear unabhängigen Vektoren eine Basis ist.

6.4a) Wählen Sie, falls möglich, mithilfe des Gaussverfahrens unter den folgenden sechs Vektoren eine Basis für $\mathbb{R}^3$ aus (mit Begründung). Gibt es mehrere Möglichkeiten?

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}$$

6.4b) Gegeben seien nun die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix}a\\a\\1+a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\b\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}c\\c\\b+c\end{pmatrix}.$$

Diese Vektoren spannen einen Unterraum von $\mathbb{R}^3$ auf. Wie hängt die Dimension dieses Unterraumes von den Werten der auftretenden Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ ab?

Aufgabe 6.5 Kern und Bild

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\-4 & 0 & 1 & -3\\2 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Basen für $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ und $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

Aufgabe 6.6 Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Basis

Gegeben sei die Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \mathbf{b}^{(3)}\}$ für $\mathbb{R}^3$, wobei

$$\mathbf{b}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

6.6a) Betrachten Sie den Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Finden Sie die Koordinaten $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, die $\mathbf{x}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ beschreiben, d.h., so dass

$$\mathbf{x} = y_1\,\mathbf{b}^{(1)} + y_2\,\mathbf{b}^{(2)} + y_3\,\mathbf{b}^{(3)}.$$

6.6b) Sei nun der Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ beschrieben durch die Koordinaten $(1, -2, 2)^\top$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$. Bestimmen Sie die Koordinaten von $\mathbf{v}$ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Aufgabe 6.7 Koordinatentransformation

In der Vorlesung haben wir die Darstellung von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ als Koordinatenvektoren bezüglich einer Basis kennen gelernt. Diese Aufgabe übt den Umgang mit Basiswechselmatrizen anhand von anschaulichen Beispielen im $\mathbb{R}^3$.

Gegeben seien die zwei Basen $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ des $\mathbb{R}^3$:

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

6.7a) Finden Sie die Basiswechselmatrix $\mathbf{S}$, welche Koordinaten bezüglich der Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ auf die zugehörigen Koordinaten bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ abbildet.

Tipp: Erinnern Sie sich an die Tatsache, dass die Spalten der Basiswechselmatrix die Koordinaten der "alten Basis" $\tilde{\mathcal{B}}$ bezüglich der "neuen Basis" $\mathcal{B}$ enthalten. Hier müssen Sie lineare Gleichungssysteme lösen, um diese Koordinaten zu bestimmen.

6.7b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$\mathbf{v} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.

Veröffentlichung am 27. Oktober 2015.

Abzugeben bis 4. November 2015.