P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 7

Aufgabe 7.1 Das Kreuzprodukt

In dieser Aufgabe lernen Sie das *Kreuzprodukt* (oft auch *äusseres Produkt* genannt) zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ kennen. Das Kreuzprodukt zweier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ liefert einen neuen Vektor im $\mathbb{R}^3$, dessen Richtung und Länge ganz spezielle Eigenschaften haben, die wir in der vorliegenden Aufgabe ergründen. Erinnern Sie sich aus der Vorlesung daran, dass zwei Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *orthogonal* oder *senkrecht* genannt werden, wenn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ gilt, wobei $(\,) \cdot (\,) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ das Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Es seien für die folgenden zwei Teilaufgaben $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$. Das Kreuzprodukt von $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^\top$ ist definiert als der Vektor

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

7.1a) Bestimmen Sie eine Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3,3}$, so dass

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y}.$$

7.1b) Zeigen Sie, dass $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ senkrecht auf $\mathbf{x}$ und auf $\mathbf{y}$ steht.

7.1c) Rechnen Sie eine der folgenden Identitäten für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ nach:

$$\begin{array}{lr} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} & \text{(Grassmann)} \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0} & \text{(Jacobi)} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) & \text{(Lagrange)} \end{array}$$

7.1d) Verwenden Sie die Lagrange-Identität aus der vorigen Teilaufgaben um zu zeigen, dass für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \sin \varphi$$

gilt, wobei $\varphi \in [0, \pi]$ der von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ eingeschlossene Winkel ist. Dieser Satz besagt, dass die Länge des Vektors $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ gleich der Fläche des von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist.

Tipp: Es gilt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \varphi$.

Bemerkung: Zusammengefasst stellen wir also fest, dass das Kreuzprodukt $\mathbf{x} \times \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ von zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ auf $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ senkrecht steht und dass seine Länge genau dem Flächeninhalt des von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aufgespannten Parallelogramms entspricht.

Aufgabe 7.2 Rotationsmatrizen in $\mathbb{R}^2$

In dieser Aufgabe soll Ihnen aufgezeigt werden, dass Rotationen in zwei Dimensionen durch Matrizen beschrieben werden können (analog gilt das auch in drei oder beliebig vielen Dimensionen), genauer gesagt, durch *orthogonale* Matrizen.

Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ heisst *orthogonal*, wenn

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{I} \tag{7.2.1}$$

gilt. Eine orthogonale Matrix ist also eine Matrix mit der schönen Eigenschaft, dass ihre Inverse gerade ihrer Transponierten entspricht. Ausserdem ist eine Matrix genau dann orthogonal, wenn ihre Spalten paarweise orthogonal aufeinander stehen und alle Länge 1 haben (dies folgt direkt, wenn man (7.2.1) ausschreibt). Analog gilt diese Aussage auch für ihre Zeilen.

Im folgenden verwenden wir für $\varphi \in [0, 2\pi)$ die Notation

$$\mathbf{D}(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$$

für eine Rotationsmatrix um den Winkel φ in der Ebene.

7.2a) Zeige, dass $\mathbf{D}(\varphi)$ für alle $\varphi \in [0, 2\pi)$ orthogonal ist.

Tipp: Direkte Rechnung gemäss (7.2.1).

7.2b) Zeige für beliebige $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und $\varphi \in [0, 2\pi)$, dass die Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{x}$ tatsächlich den Winkel φ einschliessen.

7.2c) Zeige, dass die Hintereinanderausführung von Rotationen in der Ebene kommutiert, das heisst, dass

$$\mathbf{D}(\varphi)\mathbf{D}(\psi) = \mathbf{D}(\psi)\mathbf{D}(\varphi) \quad \text{für beliebige Winkel } \varphi, \psi \in [0, 2\pi).$$

Tipp: Verwende geeignete trigonometrische Identitäten, wie man sie etwa auf http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_trigonometric_identities findet.

Aufgabe 7.3 Basis des Kerns

Gegeben seien die folgenden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,4}.$$

Bestimmen Sie den Kern der Matrizen und geben sie jeweils eine Basis des Kerns an.

Aufgabe 7.4 Basis des Bildes

Gegeben seien dieselben Matrizen wie in Aufgabe 7.3:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 6 & 16 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,4}.$$

7.4a) Geben Sie das Bild der Matrizen an und bestimmen Sie jeweils eine Basis des Bildes.

7.4b) Geben Sie jeweils für $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ die Dimension des Bildes und des Kerns an (verwenden Sie dafür Aufgabe 7.3). Überprüfen Sie dann, dass der Rangsatz aus der Vorlesung für die gegebenen Matrizen erfüllt ist, das heisst, dass für jede Matrix $\mathbf{M} \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}\}$

$$\dim \operatorname{Kern}(\mathbf{M}) + \dim \operatorname{Bild}(\mathbf{M}) = n$$

gilt, wobei n die Anzahl Spalten von $\mathbf{M}$ bezeichnet.

Aufgabe 7.5 Multiple Choice: Bild und Kern

Entscheiden Sie in den folgenden Teilaufgaben, welche der gegebenen Antworten richtig und welche falsch sind, und geben Sie jeweils eine Begründung an.

7.5a) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ so, dass $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung hat. Dann gilt:

(i) $\dim \operatorname{Bild}(\mathbf{A}) = n$

(ii) $\dim \operatorname{Bild}(\mathbf{A}) = 1$

(iii) $\dim \operatorname{Kern}(\mathbf{A}) = 0$

(iv) $\dim \operatorname{Kern}(\mathbf{A}) = 1$

7.5b) Das Bild von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch die lineare Hülle der Vektoren ...

(i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

(iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(iv) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(v) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

7.5c) Eine Basis des Kerns von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch ...

(i) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

(iii) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(iv) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

(v) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

7.5d) Der Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Basis $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ die Koordinaten $(-1, -1)$. Die Koordinaten bezüglich der Standardbasis sind ...

(i) $(\frac{1}{2}, 0)$.

(ii) $(-1, -1)$.

(iii) $(0, -2)$.

(iv) $(2, 0)$.

(v) $(1, 1)$.

Veröffentlichung am 3. November 2015.
Abzugeben bis 11. November 2015.