P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 8

Aufgabe 8.1 Basen für Bild und Kern

Gegeben sind die beiden 2×3 Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

8.1a) Bestimmen Sie Basen für $\mathrm{Bild}(\mathbf{A}), \mathrm{Bild}(\mathbf{A}^\top), \mathrm{Kern}(\mathbf{A}), \mathrm{Kern}(\mathbf{A}^\top)$.

8.1b) Bestimmen Sie Basen für $\mathrm{Bild}(\mathbf{B}), \mathrm{Bild}(\mathbf{B}^\top), \mathrm{Kern}(\mathbf{B}), \mathrm{Kern}(\mathbf{B}^\top)$.

Aufgabe 8.2 Lineare Abhängigkeit von Mengen von Vektoren

In der Vorlesung haben Sie lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit definiert. In dieser Aufgabe geht es darum, die Begriffe ein wenig genauer zu untersuchen und sich zu überlegen, in welchen Fällen Sie es mit linear abhängigen bzw. unabhängigen Mengen von Vektoren zu tun haben.

Seien $k, n, p \in \mathbb{N}$. Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

8.2a) Die Menge $\mathcal{S} := \{\mathbf{0}\}$, welche nur aus dem Nullvektor in $\mathbb{R}^n$ besteht ist linear unabhängig.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

8.2b) Eine Menge $\mathcal{S} := \{\mathbf{v}\}$, welche nur einen einzigen nicht-Null-Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ enthält, ist linear unabhängig.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

8.2c) Die Menge $\mathcal{S} := \{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\} \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann linear abhängig, wenn einer der Vektoren aus $\mathcal{S}$ ein skalares Vielfaches des anderen Vektors darstellt.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

8.2d) Es gibt Vektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass die Menge $\left\{\mathbf{0}, \mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k\right\}$ linear unabhängig ist.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

8.2e) Wenn die Menge $\left\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^k\right\} \subset \mathbb{R}^n$ linear abhängig ist, dann ist auch die Menge $\left\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^k, \mathbf{w}^1, \mathbf{w}^2, \ldots, \mathbf{w}^p\right\} \subset \mathbb{R}^n$ linear abhängig für beliebige Vektoren $\mathbf{w}^i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \{1, \ldots, p\}$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

8.2f) Sofern $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2\} \subset \mathbb{R}^n$ linear unabhängig ist, die Menge $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \mathbf{v}^3\} \subset \mathbb{R}^n$ jedoch linear abhängig, dann kann $\mathbf{v}^3$ als Linearkombination von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ dargestellt werden.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

Aufgabe 8.3 Lineare Abhängigkeit orthogonaler Vektoren

Es sei $\mathcal{M} := \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ eine Menge von von $\mathbf{0}$ verschiedenen Vektoren in $\mathbb{R}^n$ für die gilt

$$\langle \mathbf{v}^m, \mathbf{v}^l \rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad l, m \in \{1, \ldots, k\},\ m \neq l\ . \tag{8.3.1}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 8.4 Orthonormale Basis

Gegeben seien die Vektoren

$$\mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Vektoren $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$, $\mathbf{v}^{(3)}$ eine orthonormale Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden, d. h. zeigen Sie, dass $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$, $\mathbf{v}^{(3)}$

- Einheitsvektoren sind (das bedeutet, dass ihre Länge 1 ist, i.e. $\sqrt{\langle \mathbf{v}^{(i)}, \mathbf{v}^{(i)} \rangle} = 1$, $i = 1, 2, 3$),
- paarweise orthogonal sind,
- eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 8.5 Basiswechsel

Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ mit der Standardbasis $\mathcal{B}$. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

definiert eine lineare Abbildung von V nach V.

8.5a) Durch die Wahl der neuen Basis

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

werden neue Koordinaten eingeführt. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix T von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$.

8.5b) Durch welche Matrix B wird die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten beschrieben?

8.5c) Interpretieren Sie die Abbildung geometrisch.

Aufgabe 8.6 Unterräume des $\mathbb{R}^3$

8.6a) Sei V die folgende Teilmenge des $\mathbb{R}^3$: $\left\{(x, y, 2x + y)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}$. Zeigen Sie, dass V ein Unterraum des reellen Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ ist.

8.6b) Ist die Menge $W = \left\{(x, 2x+1, x)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\right\}$ auch ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8.7 Ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$

Die Vektoren $a = (1, -2, 5, -3)^\top$, $b = (2, 3, 1, -4)^\top$ und $c = (3, 8, -3, -5)^\top$ erzeugen einen Unterraum W von $\mathbb{R}^4$.

8.7a) Bestimmen Sie $\dim W$ und eine Basis von W.

8.7b) Vervollständigen Sie diese Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

8.7c) Geben Sie ein homogenes LGS an, welches W als Lösungsraum hat.

Veröffentlichung am 10. November 2015.

Abzugeben bis 18. November 2015.