P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 9

Aufgabe 9.1 Bestimmung orthogonaler Matrizen anhand von Parametergleichungen

In der Vorlesung (wie auch in Aufgabe 7.2 von Serie 7) wurden orthogonale Matrizen eingeführt. Die Orthogonalität einer Matrix verifiziert man üblicherweise direkt aus der Definition.

Gegeben ist die Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & a & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -c & d \\ e & 0 & -f \end{pmatrix}, \tag{9.1.1}$$

wobei $a, b, c, d, e, f \in [0, \infty)$.

9.1a) Wieviele Bestimmungsgleichungen für die Einträge einer 3×3-Matrix sind durch die Eigenschaft der Orthogonalität impliziert?

Tipp: Beachten Sie, dass für $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3,3}$ das Matrixprodukt $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top$ immer *symmetrisch* ist.

9.1b) Finden Sie Werte für die Parameter $a, b, c, d, e, f \in [0, \infty)$ so, dass die Matrix $\mathbf{B}$ aus (9.1.1) orthogonal ist.

Aufgabe 9.2 QR-Zerlegung von Matrizen mithilfe des Gram-Schmidt-Algorithmus

In dieser Aufgabe sollen Sie den Gram-Schmidt'schen Orthonormalisierungsalgorithmus einmal "von Hand" durchführen, um seine Details zu verstehen. Zusätzlich sollen Sie lernen, wie man als Nebenprodukt auch die Matrix $\mathbf{R}$ aus der QR-Zerlegung erhält.

Gegeben seien die Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

9.2a) Wenden Sie den Gram-Schmidt-Algorithmus an und finden Sie eine Orthonormalbasis für den Spaltenraum von $\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{B}$.

9.2b) Ist die (sparsame) $\mathbf{QR}$-Zerlegung von $\mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{B}$ definiert? Falls ja, bestimmen Sie diese mithilfe der in Teilaufgabe 9.2a) erhaltenen Ergebnisse. Die sparsame $\mathbf{QR}$-Zerlegung einer Matrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n,k}$ mit $\operatorname{Rang}\mathbf{C} = k$ bezeichnet hierbei die $\mathbf{QR}$-Zerlegung, bei der $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,k}$ und $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{k,k}$, das heisst, $\mathbf{Q}$ wird *nicht* zu einer orthogonalen (quadratischen) Matrix erweitert und an $\mathbf{R}$ werden *keine* Nullzeilen "angefügt".

Aufgabe 9.3 Eine einfache lineare Regression

Gegeben sei eine natürliche Zahl n. Anhand von n Messungen der skalaren Grösse x haben wir n (leicht verschiedene) Messwerte m_1, m_2,...,m_n für x erhalten aus denen wir durch Lösen eines überbestimmten linearen Gleichungssystems im Sinne der kleinsten Quadrater eine Schätzung für x erhalten wollen.

Kleinste-Quadrate-Lösung von überbestimmten linearen Gleichungssystemen.

9.3a) Stellen Sie das überbestimmte lineare Gleichungssystem für das vorliegende Problem auf.

9.3b) Stellen Sie die zugehörigen *Normalengleichugen* gemäss der Vorlesung auf.

9.3c) Bestimmen Sie die *Kleinste-Quadrate-Lösung* und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 9.4 Polynomiale Regression

Auch in dieser Aufgabe geht es wieder um die Bestimmung von Parametern aus Messwerten mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate aus der Vorlesung. Die Parameter sind hier nicht unmittelbar in der Aufgabenstellung bezeichnet, so wie das bei "real-life"-Problemen immer der Fall ist.

Sei die Funktion $f(x)$ gegeben als *Linearkombination* der Funktionen

$$g_1(x) = 2^x \quad \text{und} \quad g_2(x) = 2^{-x}.$$

Anhand von Messungen wurde festgestellt, dass der Graph von $f(x)$, gegeben durch

$$\operatorname{Graph}(f) := \{(x, f(x)) \,:\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2,$$

durch folgende Punkte der (x, y)-Ebene verläuft:

x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	-8	-4	-2	4	12

9.4a) Auf welches überbestimmte lineare Gleichungssystem führt die Schätzung von f?

9.4b) Was sind die zugehörigen Normalengleichungen?

9.4c) Verwenden Sie die Kleinste-Quadrate-Methode, um $f(x)$ aus den Messdaten "zu bestimmen".

Aufgabe 9.5 Berechnung der Determinante einer 6×6-Matrix

In dieser Aufgabe geht es um die Berechnung der Determinante einer eingermassen “grossen” 6×6-Matrix. Diese Aufgabe war eine Prüfunsaufgabe in der Basisprüfung vor acht Jahren.

Gegeben sei die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & b & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 7 & -1 & c \\ 5 & 1 & d & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6,6}.$$

9.5a) Berechnen Sie $\det \mathbf{A}$.

Tipp: Wenden Sie nicht direkt das Gaussverfahren an, sondern nutzen Sie die Struktur der Matrix aus (stand nicht in der Prüfung).

9.5b) Für welche Werte der Parameter a, b, c, d ist die Matrix $\mathbf{A}$ singulär?

Aufgabe 9.6 Multiple Choice: Determinante

Die Determinante von $n \times n$-Matrizen kann als eine Abbildung von n Vektoren in die reellen Zahlen aufgefasst werden, die in jedem Argument linear ist und ihr Vorzeichen bei Vertauschung von zwei Argumenten ändert, siehe Vorlesung.

In dieser einfachen Aufgabe geht es darum, die Rechenregeln der Determinante richtig anzuwenden, bzw. der Versuchung zu widerstehen, gewisse vermeintliche Formeln anzuwenden.

Begründen Sie, welche der folgenden Aussagen richtig sind für beliebige $n \times n$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.

(i) $\det(2\mathbf{A}) = 2\det(\mathbf{A})$

(ii) $\det(\mathbf{A}^4) = (\det(\mathbf{A}))^4$

(iii) $\det(\mathbf{A}) = a_{1,n} \cdot a_{2,n-1} \cdots a_{n,1}$ wenn $a_{i,j} = 0$ für $i + j > n + 1$, d.h. es handelt sich um eine Dreiecksmatrix, bei welcher rechts unten Nullen stehen.

(iv) $\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) + \det(\mathbf{B})$

(v) $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$

(vi) Wenn $\mathbf{A}$ singulär ist, dann ist auch $\mathbf{AB}$ singulär.

(vii) $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A})^3$

Veröffentlichung am 17. November 2015.

Abzugeben bis 25. November 2015.