P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 12

Aufgabe 12.1 Matrixpotenzen und Eigenwerte

Diese Aufgabe ist eine Vorbereitung auf Eigenwerte und Eigenvektoren und zeigt gleichzeitig eine mögliche Anwendung auf. Wir suchen eine einfache Methode um $\mathbf{A}^{100}\mathbf{x}$ zu berechnen für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ und

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

12.1a) Wenn $\mathbf{x}$ ein Vektor ist mit der Eigenschaft $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, was ist dann $\mathbf{A}^k\mathbf{x}$ für $k = 1, 2, \ldots$?

Wir suchen daher Paare $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit der Eigenschaft, dass $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

12.1b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ für ein gegebenes λ ein homogenes, lineares Gleichungssystem darstellt. Wie sieht die zugehörige Koeffizientenmatrix aus?

12.1c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Determinante Werte von λ, für die $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ Lösungen $\mathbf{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat.

Aufgabe 12.2 Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 5 \\ 5 & -6 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12.3 Dimension des Eigenraums

Sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b & a & \cdots & a \\ a & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix}$ eine $(n \times n)$-Matrix, $a \neq 0$, $n \geq 2$.

12.3a) Zeigen Sie, dass $b - a$ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist.

12.3b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A} - (b-a)\mathbf{I}_n)$, d.h. die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert $b - a$.

12.3c) Finden Sie einen Eigenvektor zu einem Eigenwert $\neq b - a$ von $\mathbf{A}$.

Tipp: Weil $\mathbf{A}$ symmetrisch ist, muss der gesuchte Eigenvektor senkrecht stehen auf allen Vektoren von $\mathrm{Kern}(\mathbf{A} - (b-a)\mathbf{I}_n)$.

Aufgabe 12.4 Die Spur diagonalisierbarer Matrizen

In dieser Aufgabe lernen wir eine spezielle Funktion auf dem Raum der quadratischen Matrizen kennen, die *Spur*. Sie steht in enger Beziehung zum Spektrum einer Matrix.

Die Spur einer quadratischen Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist definiert als

$$\mathrm{Spur}\,\mathbf{M} := \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{M})_{j,j} \,. \tag{12.4.1}$$

12.4a) Bestimmen Sie die Dimension des Unterraums

$$\mathcal{U} := \{\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n} \;:\; \mathrm{Spur}\,\mathbf{M} = 0\} \subset \mathbb{R}^{n,n} \,.$$

Tipp: Sie können $\mathcal{U}$ als Kern einer “Matrix” charakerisieren. Dann sieht man, dass diese Matrix nur ein Zeilenvektor ist.

12.4b) Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{Spur}\,\mathbf{BC} = \mathrm{Spur}\,\mathbf{CB} \,, \quad \text{für alle Matrizen } \mathbf{B},\, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n,n} \,. \tag{12.4.2}$$

Tipp: Einfach nachrechnen mit den Formeln für das Matrixprodukt. Es gibt hier keine Tricks!

12.4c) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ diagonalisierbar, mit

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\,\underbrace{\mathrm{diag}(\lambda_1,\, \ldots,\, \lambda_n)}_{=:\mathbf{D}}\,\mathbf{S}^{-1} \,, \tag{12.4.3}$$

wobei $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass gilt

$$\mathrm{Spur}\,\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \,. \tag{12.4.4}$$

Bemerkung: Die Identität (12.4.4) bietet ein nützliches Hilfsmittel zur Überprüfung der Korrektheit von berechneten Eigenwerten.

Tipp: Sehr einfach wird die Aufgabe, wenn Sie das Resultat aus Teilaufgabe 12.4b) anwenden. Die Spur einer Diagonalmatrix sollte klar sein.

Aufgabe 12.5 Betrachtung zweier Spezieller Isometrien des $\mathbb{R}^2$

Gegenstand dieser Aufgabe sind spezielle Isometrien in der Ebene und ihre Matrixdarstellung.

Wir betrachten die folgenden 2×2-Matrizen

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_2 - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^\top \quad , \quad \mathbf{B} = \mathbf{I}_2 - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top \ , \quad \mathbf{I}_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

wobei $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ *Einheitsvektoren* sind, das heisst $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$. Diese Matrizen definieren zwei lineare Selbstabbildungen des $\mathbb{R}^2$, die mit F und G abgekürzt werden.

12.5a) Zeigen Sie, dass F und G Isometrien sind.

12.5b) Sowohl für F als auch für G gibt es jeweils einen eindimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^2$, dessen Vektoren von F bzw. G auf sich selbst abgebildet werden. Beschreiben Sie diese Unterräume durch jeweils eine Formel.

12.5c) Geben Sie eine geometrische Interpretation von F und G in der Ebene und verdeutlichen Sie diese durch eine Skizze.

12.5d) Zeigen Sie, dass die Hintereinanderausführung von F und G eine Drehung ist. Was ist der Drehwinkel?

Tipp: Überlegen Sie sich, dass wir die Vektoren $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ als

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

schreiben können, da $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = 1$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine Rotationsmatrix von der Form

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) \end{pmatrix},$$

ist für einen Winkel $\psi \in [0, 2\pi)$.

12.5e) Geben Sie eine geometrische Deutung des Resultats der vorhergehenden Teilaufgabe.

Aufgabe 12.6 Eigenwerte und Eigenvektoren

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen richtig bzw. falsch sind für beliebige $(n \times n)$-Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$?

12.6a) Ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$, dann ist $\mathbf{x}$ auch ein Eigenvektor von $\mathbf{A}^2$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

12.6b) Ist λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$, dann ist λ auch ein Eigenwert von $\mathbf{A}^2$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

12.6c) Ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}$ und auch ein Eigenvektor von $\mathbf{B}$, dann ist $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

12.6d) Ist λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ und auch ein Eigenwert von $\mathbf{B}$, dann ist λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

12.6e) Ist λ ein Eigenwert von $\mathbf{A}$, so ist $\lambda+1$ ein Eigenwert von $\mathbf{A}+\mathbf{I}$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

12.6f) Ist $\mathbf{A}$ eine diagonalisierbare Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, so gilt

$$\det(\mathbf{A}) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

12.6g) Ist $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, dann hat $\mathbf{A} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^\top$ den Eigenvektor $\mathbf{u}$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

12.6h) Die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ ändern sich nicht, wenn man 2 Zeilen von $\mathbf{A}$ vertauscht.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

12.6i) Falls $\sigma(\mathbf{A}) = \{0\}$, dann ist $\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

12.6j) Falls $\mathbf{A}$ *symmetrisch* ist und noch gilt $\sigma(\mathbf{A}) = \{0\}$, dann ist $\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

(i) Richtig.

(ii) Falsch.

Veröffentlichung am 8. Dezember 2015.
Abzugeben bis 16. Dezember 2015.