P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 2

Aufgabe 2.1 Lineare Gleichungssysteme

Vorgegeben ist ein lineares Gleichungssystem in Matrixdarstellung $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Diese soll dann in “Gleichungsform” übersetzt werden (mit Unbekannten $x_1, \dots, x_n$).

2.1a) Für $n = 3$ und das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a \end{bmatrix} \quad , \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

2.1b) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{falls } i + j = n + 1 \; , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} .$$

2.1c) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j, \text{ für } j = 1, \dots, n \; , \\ -1 & \text{falls } j = i + 1, \text{ für } i = 1, \dots, n-1 \; , \\ -1 & \text{falls } i = n \wedge j = 1 \text{ oder } i = 1 \wedge j = n \; , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} .$$

Tipp: Der Operator $\wedge$ bezeichnet das logische Und.

2.1d) Für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \text{ für } j = 1, \dots, n \; , \\ 1 & \text{falls } i = 1, \text{ für } j = 1, \dots, n \; , \\ 1 & \text{falls } j = n, \text{ für } i = 1, \dots, n \; , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad b_1 = 1 \; , \quad b_j = 0 \quad \text{für } j > 1 \; .$$

Aufgabe 2.2 Lineare Paranussgleichung

Systeme, die sich mit Hilfe von linearer Überlagerung modellieren lassen, führen oft auf lineare Gleichungssysteme. Ein ganz einfacher solcher Fall wird hier betrachtet.

Ein Händler liefert Nüsse an den Grosshändler Migros. Um die Nüsse *exakt* kostendeckend zu verkaufen, muss der Händler $c\,\mathrm{Fr}/\mathrm{kg}$ verlangen. Die aktuelle Ladung enthält $100\,\mathrm{kg}$ Cashewnüsse und eine unbekannte Menge Paranüsse. Der Händler hat für $85\,\mathrm{kg}$ Cashewnüsse $681\,\mathrm{Fr}$ bezahlt. Der Kilopreis der Paranüsse war um 20% höher.

2.2a) Welche Werte für c sind möglich?

2.2b) Berechnen Sie die Menge der Paranüsse in Abhängigkeit von c.

Aufgabe 2.3 Lineares Gleichungssystem

In dieser Aufgabe soll die Technik der Umformung auf Zeilenstufenform verwendet werden, um die verschiedene Aussagen über die Lösbarkeit und Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems zu verifizieren oder zu widerlegen. Wiederholen Sie dazu zunächst den Abschnitt der Vorlesung über die Zeilenstufenform und die Gausselimination, falls Sie sich nicht mehr an Details erinnern.

Durch eine Folge von Zeilenumformungen transformiert ein Student ein lineares Gleichungssystem auf die Form

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & \alpha+1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ \beta^2-1 \\ \beta+1 \end{bmatrix}.$$

Die folgenden Aussagen beziehen sich auf das ursprüngliche lineare Gleichungssystem. Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an:

2.3a) Für $\alpha = 2$ und beliebiges β hat das System genau eine Lösung.

2.3b) Für $\alpha = 2$ und $\beta = -1$ hat das System genau eine Lösung.

2.3c) Für $\alpha \neq 2$ und beliebiges β hat das System genau eine Lösung.

2.3d) Für $\beta = -1$ hat das System immer eine Lösung.

2.3e) Für $\alpha = 3$ ist $x_1 = \frac{1}{8}(\beta^2+3)$, $x_2 = \frac{1}{4}(\beta^2-1)$, $x_3 = \beta+1$ die einzige Lösung des Systems.

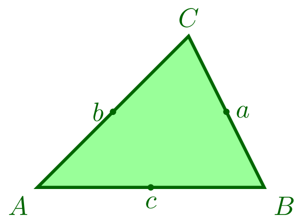
2.3f) Für $\alpha = 2$ and $\beta = -1$ lässt sich die Lösungsmenge beschreiben durch

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ (\mathbf{x})_1 = 2 - \frac{3}{2}t,\ (\mathbf{x})_2 = 0,\ (\mathbf{x})_3 = t, \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 2.4 Lineares Gleichungssystem

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass lineare Gleichungssysteme in einer Vielzahl von mathematischen Modellen eine zentrale Rolle spielen. In dieser Aufgabe begegnet uns überraschenderweise ein lineares Gleichungssystem in einem geometrischen Zusammenhang.

Um die Eckpunkte eines allgemeinen Dreiecks ΔABC wird je ein Kreis gezeichnet, so dass sie sich paarweise in Punkten auf den Dreiecksseiten berühren.



Geben Sie die Kreisradien r_A, r_B und r_C in Abhängigkeit von den Längen der Dreiecksseiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ an.

Aufgabe 2.5 Lösungsmengen von Linearen Gleichungssystemen mit Parametern

In dieser Aufgabe sollen Sie die Transformation eines linearen Gleichungssystems auf Zeilenstufenform mit Hilfe des Gaussalgorithmus durchführen und anschliessend die Lösungsmenge bestimmen.

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ax_1 &+ 4x_2 &+ 5x_3 &= a \\ x_1 &+ ax_2 &- 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 &+ 2ax_2 &- a^2x_3 &= a \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

2.5a) Geben Sie die Zeilenstufenform des linearen Gleichungssystems an.

Tipp: Führen Sie eventuell erforderliche Fallunterscheidungen durch!

2.5b) Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen? Bestimmen Sie jeweils auch die Lösungsmenge von (2.5.1).

Aufgabe 2.6 Lineares Gleichungssystem: Gestörtes zeitdiskretes Signal

Additive Überlagerung von örtlich benachbarten Pixeln bei der Übertragung eines Graustufenbildes führt zu Unschärfe des Bildes. Durch Lösung eines linearen Gleichungssystems kann das Bild rekonstruiert werden, eine Technik, die “Deblurring” genannt wird.

In dieser Aufgabe sehen wir Ähnliches in dem einfacheren Kontext der Übertragung eines zeitdiskreten Analogsignals.

Ein zeitdiskretes Analogsignal wird in Form von Lichtpulsen in ein Glasfaserkabel eingespeist. Dabei werden $n \in \mathbb{N}$ Lichtpulse jeweils gleichen Zeitabständen $\Delta t > 0$ von einer Laserdiode emittiert. Wir bezeichnen die Signalamplitude zum Zeitpunkt $(i-1)\Delta t$, $i \in \{1, \dots, n\}$ mit x_i. Beim Empfänger wird das Signal ebenfalls in gleichen Zeitabständen Δt durch eine Photodiode abgetastet. Das zum Zeitpunkt $(i-1)\Delta t$ empfangene Signal werde mit y_i bezeichnet, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Infolge der frequenzabhängigen Dämpfung des Signals in der Glasfaser werden die scharfen Pulse aufgeweitet und überlagern sich schliesslich additiv, so dass auch die beiden vorhergehenden Pulse x_{i-1} und x_{i-2} schliesslich noch zu y_i beitragen und zwar gemäss der Formel

$$y_i = (1-\alpha)x_i + \frac{2}{3}\alpha x_{i-1} + \frac{1}{3}\alpha x_{i-2}\,, \tag{2.6.1}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und der Konvention, dass $x_i := 0$, sofern $i \leq 1$.

2.6a) Stellen Sie ein lineares Glechungssystem auf, das für gegebene y_i von den unbekannten Signalamplituden x_i erfüllt wird.

2.6b) Für welche $\alpha \geq 0$ besitzt das LGS aus 2.6a) eine eindeutige Lösung?

Tipp: Um eindeutige Lösbarkeit festzustellen, reicht es in diesem Beispiel aus, wenn Sie nur die linke Seite des in Teilaufgabe 2.6a) erhaltenen LGS betrachten. Die linke Seite entspricht der Koeffizientenmatrix mal dem Vektor der Unbekannten.

2.6c) Berechne die Amplituden x_i für $n = 3$ in Abhängigkeit von α, $0 < \alpha < 1$.

Veröffentlichung am 29. September 2015.

Abzugeben bis 07. Oktober 2015.