P. Grohs
T. Welti
F. Weber

Herbstsemester 2015

ETH Zürich
D-MATH

# Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

## Serie 4

**Bemerkung:** Für eine quadratische Matrix $\mathbf{A}$ sind die Potenzen $\mathbf{A}^k$ definiert durch das $k$-fache Matrixprodukt:

$$\mathbf{A}^k := \underbrace{\mathbf{A} \cdot \cdots \cdot \mathbf{A}}_{k \text{ Faktoren}} .$$

## Aufgabe 4.1 Gauss-Jordan-Algorithmus

Für eine invertierbare Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$, erlaubt der Gauss-Jordan-Algorithmus die Berechnung ihrer Inverse $\mathbf{B}^{-1}$. Er funktioniert folgendermassen: Die gesamte Einheitsmatrix wird als rechte Seite in das (vom Gauss-Algorithmus bekannte) Schema geschrieben und der Gauss-Algorithmus auf dieses um $n$ Spalten erweiterte System angewendet, um das Gleichungssystem in Zeilenstufenform zu bringen (insbesondere werden beim Gauss-Jordan-Algorithmus also auch die Einträge oberhalb jeder 1 in den Pivotspalten durch Abziehen entsprechender Vielfache der Pivotzeilen eliminiert – die daraus resultierende Form wird in der Vorlesung Zeilenstufenform genannt). Im Falle einer invertierbaren Matrix steht danach auf der linken Seite die Einheitsmatrix, während auf der rechten Seite die Inverse abgelesen werden kann.

Beachten Sie, dass sich mit dem Gauss-Jordan-Algorithmus nicht nur die Inverse berechnen lässt, sondern auch jedes beliebige andere lineare Gleichungssystem simultan für verschiedene rechten Seiten gelöst werden kann.

Für einen Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ betrachten wir im Folgenden die $4 \times 4$-Matrix

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}.$$

**4.1a)** Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $\mathbf{A}(\alpha)$ invertierbar ist und berechnen Sie $[\mathbf{A}(\alpha)]^{-1}$ in Abhängigkeit von diesen $\alpha$ mithilfe des Gauss-Jordan-Algorithmus (Gauss-Algorithmus).

**Tipp:** Vertauschen Sie als erstes die erste und die vierte Zeile, um Rechenaufwand zu sparen.

**4.1b)** Sei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

und sei $\alpha_0$ so gewählt, dass $\mathbf{A}(\alpha_0)$ invertierbar ist und $\left([\mathbf{A}(\alpha_0)]^{-1}\right)_{4,4} = -3$ gilt. Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}(\alpha_0)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mithilfe von Teilaufgabe 4.1a). Wieso ist die Lösung eindeutig?

**4.1c)** Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\left(\frac{1}{7}\right)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mithilfe des Gauss-Algorithmus aus der Vorlesung, wobei $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ in der vorigen Teilaufgabe 4.1b) gegeben ist.

## Aufgabe 4.2 Matrixpotenzen berechnen

Betrachten Sie eine $n \times n$ Matrix $\mathbf{A}$ und die $n \times n$ Identitätsmatrix $\mathbf{I}_n$. Wir definieren die Matrix $\mathbf{A}_1$ durch $\mathbf{A}_1 := \mathbf{A} - \mathbf{I}_n$. $\mathbf{A}^k$ kann somit wie folgt berechnet werden:

$$\mathbf{A}^k = (\mathbf{I}_n + \mathbf{A}_1)^k = \mathbf{I}_n + \binom{k}{1}\mathbf{A}_1 + \binom{k}{2}\mathbf{A}_1^2 + \ldots + \binom{k}{k}\mathbf{A}_1^k. \tag{4.2.1}$$

Betrachten Sie nun den Spezialfall

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**4.2a)** Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt $\mathbf{A}_1^k = \mathbf{0}$ für $k \geq 3$.

**4.2b)** Berechnen Sie $\mathbf{A}^{10}$, indem Sie Formel (4.2.1) verwenden.

## Aufgabe 4.3 Vektoraddition: Ziffernblatt einer Uhr

Die Lage von Punkten in der Ebene kann durch Positionsvektoren $\in \mathbb{R}^2$ beschrieben werden, nachdem ein Koordinatensystem gewählt worden ist. Mit diesen Positionsvektoren lässt sich dann Vektorarithmetik betreiben wie in der Vorlesung eingeführt.

Im Nachfolgenden stellen wir das Ziffernblatt einer Uhr mithilfe der Einheitsscheibe (mit Radius $1$ und Scheibenmittelpunkt im Ursprung $\mathbf{0} = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$) dar.

**4.3a)** Was ist die Summe $\mathbf{s}$ der zwölf Vektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{12}$, welche vom Mittelpunkt der Uhr zu den Zeiten $1{:}00$ Uhr, $2{:}00$ Uhr, $\ldots$, $12{:}00$ Uhr zeigen?

**4.3b)** Bestimmen Sie die Summe der verbleibenden elf Vektoren, wenn der Vektor $\mathbf{v}^4$, welcher zu $4{:}00$ Uhr zeigt, aus der Menge $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^{12}\}$ entfernt wird.

**4.3c)** Nehmen Sie an, der Vektor $\mathbf{v}^1$, welcher zu $1{:}00$ Uhr zeigt, sei halbiert. Addieren Sie ihn zu den anderen elf Vektoren $\mathbf{v}^2, \ldots, \mathbf{v}^{12}$.

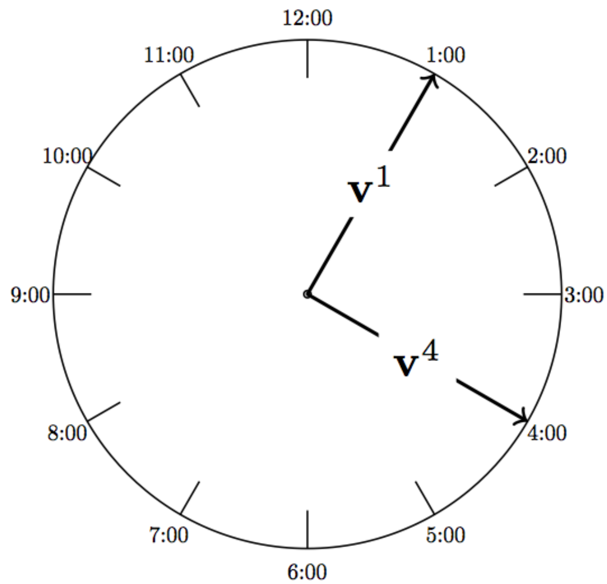


Abbildung 4.1: Skizze zu den Teilaufgaben 4.3a) - 4.3c)

**4.3d)** Nehmen Sie an, dass sich der Scheibenmittelpunkt nun in $\binom{0}{1}$ befindet. Wir definieren nun zwölf neue Vektoren $\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^{12}$ welche vom Ursprung $\mathbf{0} = \binom{0}{0}$ aus zu den Zeiten $1:00$ Uhr, $2\!:\!00$ Uhr, $\ldots$, $12\!:\!00$ Uhr zeigen. Bilden Sie die Summe $\widetilde{\mathrm{s}}$ der neuen Vektoren $\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^{12}$.

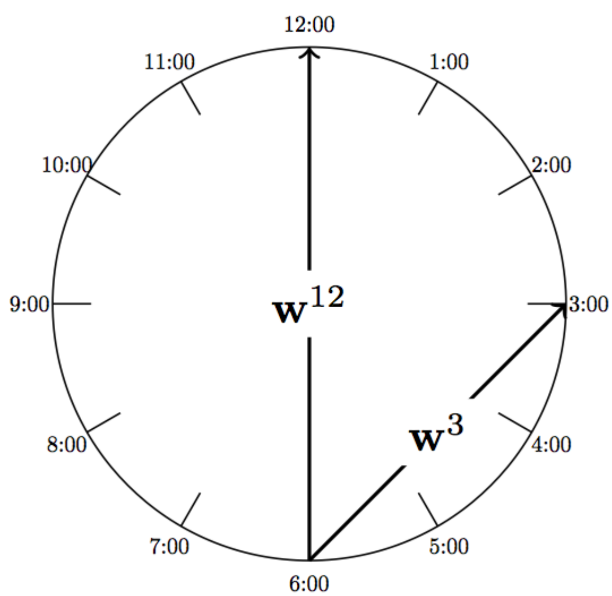


Abbildung 4.2: Skizze zur Teilaufgabe 4.3d)

## Aufgabe 4.4 Matrixmultiplikation und Addition

In der Vorlesung haben wir das Matrixprodukt kennengelernt und gelernt, wie man Matrizen addiert und mit Skalaren (Zahlen) multipliziert. Das geschieht einfach komponentenweise, siehe

Vorlesungsmitschrift.

Wichtige Einsichten waren, dass

1. das Matrixprodukt im Allgemeinen *nicht kommutiert*,
2. das Matrixprodukt mit den anderen Matrixoperationen im Sinn von Distributivgesetzen verträglich ist.

In dieser Aufgabe üben wir den Matrixkalkül mit Addition und Matrixmultiplikation. Gegeben sind dazu zwei Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

**4.4a)** Vereinfachen Sie den Term $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 + (\mathbf{A}-\mathbf{B})^2$.

**4.4b)** Vereinfachen Sie den Ausdruck $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2 - (\mathbf{A}-\mathbf{B})^2$.

## Aufgabe 4.5 Involutorische Matrix

Gegeben ist folgende Matrix aus $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x & 1+x \\ 1-x & -x \end{pmatrix}$$

**4.5a)** Berechnen Sie $\mathbf{A}^2$.

**4.5b)** Berechnen Sie $\mathbf{A}^{-1}$.

**Tipp:** Natürlich können Sie das Ergebnis von Teilaufgabe 4.5a) verwenden!:D

Veröffentlichung am 13. Oktober 2015.

Abzugeben bis 21. Oktober 2015.