P. Grohs
T. Welti
F. Weber

ETH Zürich
D-MATH

Lineare Algebra und Numerische Mathematik für D-BAUG

Serie 5

Aufgabe 5.1 Kommutierende Matrizen

In der Vorlesung und vergangenen Übungen wurde folgende wichtige Tatsache klar:

$$\boxed{\text{Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ!}}$$

Präziser ausgedrückt heisst das, dass es Paare von Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ kompatibler Grösse gibt, für die $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Das schliesst natürlich nicht aus, dass für *spezielle Matrizen* $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Das gilt offensichtlich für alle *Diagonalmatrizen*.

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit einem Paar parametrisierter Matrizen und versuchen die Parameter so zu bestimmen, dass die Matrizen kommutieren. Konkret betrachten wir

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & \alpha & 9 \\ -4 & \alpha & 4 \\ \beta & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -5 \\ 3 & -4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.1.1}$$

5.1a) Berechnen Sie die Matrixprodukte $\mathbf{AB}$ und $\mathbf{BA}$.

5.1b) Bestimmen Sie alle möglichen Werte der Parameter α und β so, dass $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Tipp: Aus $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ erhalten Sie durch komponentenweisen Abgleich ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten α und β.

Aufgabe 5.2 Distributivgesetze für Matrixmultiplikation

Sei $\mathbf{I} := \mathbf{I}_4$ die 4×4–Einheitsmatrix und

$$\mathbf{J} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Seien $\mathbf{A} := \alpha_1\mathbf{I} + \alpha_2\mathbf{J}$ und $\mathbf{B} := \beta_1\mathbf{I} + \beta_2\mathbf{J}$.

5.2a) Zeigen Sie, dass $\mathbf{AB}$ wieder von der Form $\gamma_1\mathbf{I} + \gamma_2\mathbf{J}$ ist mit gewissen Koeffizienten γ_1 und γ_2. Drücken Sie γ_1 und γ_2 aus mit Hilfe von $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$.

Tipp: Distributivgesetze für die Matrixmultiplikation anwenden.

5.2b) Bestimmen Sie β_1, β_2 so, dass $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.

5.2c) Lösen Sie für $\alpha_1 = \frac{1}{5}$, $\alpha_2 = \frac{2}{5}$ das lineare Gleichungssystem

$$[\alpha_1 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{J}]x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.3 Lineare Abhängigkeit der Spalten einer Matrix

In dieser Aufgabe untersuchen wir die lineare Abhängigkeit der Spaltenvektoren einer Matrix in Abhängigkeit von einem Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

Geben Sie an, für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ die Spalten der im Folgenden gegebenen Matrizen linear abhängig sind.

5.3a)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix},$$

5.3b)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix},$$

5.3c)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & \alpha \end{pmatrix},$$

5.3d)

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 3 & -8 & -5 \\ -1 & 2 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.4 Matrizenrechnung

5.4a) Gegeben sei die Matrix $\mathbf{A} := \left(\begin{smallmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Aus dieser möchten wir die zweite Zeile extrahieren. Das wollen wir tun, indem wir eine Matrix $\mathbf{B}$ finden, sodass entweder $\mathbf{BA} = (2, -5)$ oder $\mathbf{AB} = (2, -5)$. Für welche der folgenden Matrizen ist dies möglich?

(i) Multiplikation von rechts mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(ii) Multiplikation von links mit $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(iii) Multiplikation von rechts mit $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(iv) Multiplikation von links mit $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(v) Multiplikation von rechts mit $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

5.4b) Wie oben beschrieben, möchten wir nun die erste Spalte der Matrix $\mathbf{A}$ extrahieren. Für welche der folgenden Möglichkeiten ist dies gegeben?

(vi) Multiplikation von links mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(vii) Multiplikation von rechts mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(viii) Multiplikation von links mit $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(ix) Multiplikation von links mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(x) Multiplikation von rechts mit $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

5.4c) Eine Permuationsmatrix ist eine Matrix, die bei Multiplikation mit einer anderen Matrix, deren Zeilen (Multiplikation von links) oder Spalten (Multiplikation von rechts) vertauscht. Welche der folgenden Permutationsmatrizen $\mathbf{P}$ führt $\mathbf{A}$ in $\mathbf{PA} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 2 \\ 2 & -5 \end{smallmatrix}\right)$ über?

(xi) $\mathbf{P} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(xii) $\mathbf{P} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(xiii) $\mathbf{P} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(xiv) $\mathbf{P} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 5.5 Aussagen zum Kern

Die Konzepte der linearen Unabhängigkeit und des Kerns einer Matrix sind zentral in der linearen Algebra und werden in dieser Aufgabe geübt.

Sei eine invertierbare Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben. Weiter betrachten wir die Menge von Vektoren $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ und beliebiges $k \in \mathbb{N}$.

5.5a) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) Die Menge von Vektoren $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{A}\mathbf{v}_k\}$ ist linear unabhängig.

(ii) Die Menge von Vektoren $\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ ist linear unabhängig.

5.5b) Zeigen Sie, dass für eine beliebige Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,m}$ gilt:

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{AB}) = \mathrm{Kern}(\mathbf{B})\,.$$

Veröffentlichung am 20. Oktober 2015.

Abzugeben bis 28. Oktober 2015.