Prof. Dr. Philipp Grohs,
T. Welti,
F. Weber

ETH Zürich,
Lineare Algebra und
Numerische Methoden,
D-BAUG, HS 2015

Übungsserie 1

1.a) Das Gleichungssystem lässt sich als $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ schreiben, wobei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times n}\ ,$$
$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 1}\ .$$

b)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & & & -1 \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}\ , \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}\ .$$

c)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

d)
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

2.a) Die gesuchte Menge von linearen Gleichungen ist die Menge $\{\mathrm{LG}(a_1, a_2, a_3; a_1 + 2a_2 + 3a_3),\ \text{für } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$.

b) In Vektornotation lautet die Gleichung

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{v}) = 0,$$

wobei $\mathbf{n} = \left[\begin{smallmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{x} = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right]$ und $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$. Das heisst, die beiden Vektoren $\mathbf{x} + \mathbf{v}$ und $\mathbf{n}$ schliessen einen Winkel von $90°$ ein.

c) Wir unterscheiden zwei Fälle:

- $a = 0$: Es existiert keine Lösung in der Schnittmenge.
- $a \neq 0$: Es gibt genau eine Lösung in der Schnittmenge, die durch $\left[\begin{smallmatrix} \frac{1}{a} \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ gegeben ist ($\alpha = \frac{1}{a}$).

d) Die Menge aller Spaltenvektoren in $\mathbb{R}^3$, die im dreidimensionalen Koordinatensystem Punkten auf den Koordinatenachsen entsprechen, ist durch

$$\mathcal{M} = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} e_1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ e_2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ e_3 \end{smallmatrix}\right],\ \text{für } e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben. Die Elemente der Menge $\mathcal{M}$ sind genau dann Lösungen von LG, wenn $e_1 = a_1, e_2 = a_2, e_3 = a_3$. Daraus ergibt sich die Schnittmenge

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{L}(\mathrm{LG}) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{smallmatrix}\right] \right\}.$$

e) Für $a = -1$ liegt $\mathbf{0}$ in der Lösungsmenge.

3. Multiple Choice: Summennotation

- ☑ $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$
- ☑ $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_{n+1-k}$
- ☐ $\sum_{i=1}^n (ax_i + b) = a\big(\sum_{i=1}^n x_i\big) + b$
- ☐ $\sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) = \big(\sum_{i=1}^n x_i\big) \cdot \big(\sum_{i=1}^n y_i\big)$
- ☑ $\sum_{i=1}^n (x_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j) = 0$
- ☑ $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \cdot y_j = \big(\sum_{i=1}^n x_i\big) \cdot \big(\sum_{j=1}^n y_j\big)$
- ☐ $(a-1)\big(\sum_{i=0}^n a^i\big) = a^n - 1$ d

$(x_1 + y_1) + \ldots + (x_n + y_n) = x_1 + \ldots + x_n + y_1 + \ldots + y_n \Rightarrow$ Aussage stimmt.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_i &= x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ &= \sum_{k=1}^n x_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_n \\ &= \sum_{k=1}^n x_{n+1-k} = x_n + \ldots + x_2 + x_1\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Aussage stimmt.
$(ax_1 + b) + \ldots + (ax_n + b) \neq a(x_1 + \ldots + x_n) + b \Rightarrow$ Aussage falsch.
$(x_1 y_1) + \ldots + (x_n y_n) \neq (x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n) \Rightarrow$ Aussage falsch.
Mit $c := x_1 + \ldots + x_n$ folgt $(x_1 - \frac{1}{n}c) + \ldots + (x_n - \frac{1}{n}c) = (x_1 + \ldots + x_n) - c$
$\Rightarrow$ Aussage stimmt.

$$\begin{aligned} & x_1 y_1 + x_1 y_2 + \ldots + x_1 y_n + \\ & x_2 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_2 y_n + \\ & \ldots \\ & x_n y_1 + x_n y_2 + \ldots + x_n y_n + \\ = & (x_1 + \ldots + x_n)(y_1 + \ldots + y_n)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Aussage stimmt.

$$\begin{aligned}(a-1)\left(\sum_{i=0}^n a^i\right) &= \sum_{i=0}^n a^{i+1} - \sum_{i=0}^n a^i = a^{n+1} + \sum_{i=1}^n a^i - \sum_{i=1}^n a^i - 1 = a^{n+1} - 1 \\ &\neq a^n - 1, \quad (a \neq 0, 1)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Aussage falsch.

4. Treibstoffkosten

Das Gleichungssystem ist linear und hat in Matrixnotation die Form $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 100 & 200 & 0 & 0 \\ 0 & 400 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 800 & 2000 \\ 100 & 0 & 500 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 565 \\ 2678 - 4 - 10 \\ 4124 - 16 \\ 1156 - 3 - 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 565 \\ 2664 \\ 4108 \\ 1138 \end{bmatrix}.$$

5.a) Wir bilden das Tableau und führen den Gauss-Algorithmus aus:

$$\begin{array}{l|rrr|l} & x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline & 2 & 5 & 0 & 1 \\ \mathrm{II}+\mathrm{I} & -2 & -6 & 4 & 8 \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I} & 4 & 9 & 1 & 5 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l|rrr|l} & x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline & 2 & 5 & 0 & 1 \\ & 0 & -1 & 4 & 9 \\ \mathrm{III}-\mathrm{II} & 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \longrightarrow$$

$$\begin{array}{rrr|r} x_1 & x_2 & x_3 & 1 \\ \hline 2 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array} \quad \Rightarrow x_3 = 2 \quad \Rightarrow x_2 = -(9-4\cdot x_3) = -1 \quad \Rightarrow x_1 = \tfrac{1}{2}(1-5\cdot x_2) = 3$$

Das System hat genau eine Lösung, nämlich die Lösung $(x_1, x_2, x_3) = (3, -1, 2)$.

b) Wieder bilden wir das Tableau, und führen den Gauss-Algorithmus aus. Die zusätzliche Spalte (blau) bitte für den Moment ignorieren:

$$\begin{array}{l|rrr|r|r} & x_1 & x_2 & x_3 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ \mathrm{II}-3\cdot\mathrm{I} & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ \mathrm{III}+\mathrm{I} & -1 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l|rrr|r|r} & x_1 & x_2 & x_3 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ & 0 & -5 & 4 & -1 & -1 \\ \mathrm{III}+\mathrm{II} & 0 & 5 & -4 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{rrr|r|r} x_1 & x_2 & x_3 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Die Verträglichkeitsbedingung ist erfüllt (denn Zeile III besagt $0 = 0$). Für x_3 gibt es keinen Pivot, also setzen wir $x_3 = t$, für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$. Aus Zeile II haben wir

$$-5x_2 + 4t = -1,$$

also $x_2 = \frac{1}{5}(1+4t)$. Aus Zeile I ergibt sich

$$x_1 + 2\frac{1}{5}(1+4t) - t = 1,$$

also $x_1 = \frac{3}{5}(1-t)$. Die Lösungsmenge ist hiermit gegeben durch

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{5}(1-t) \\ \frac{1}{5}(1+4t) \\ t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Um eine rechte Seite zu finden, für die das Gleichungssystem keine Lösung besitzt, betrachten wir das Ergebnis der Gauss-Elimination. Die Verträglichkeitsbedingung darf nicht erfüllt sein, also setzen wir den dritten Eintrag der rechten Seite $\neq 0$, z.B. gleich 1. Wir gehen in umgekehrter Reihenfolge durch den Gauss-Algorithmus, um die entsprechende rechte Seite des ursprünglichen Systems zu bestimmen (siehe dazu die letzte (blaue) Spalte oben). Schon haben wir eine rechte Seite konstruiert, für die das Gleichungssystem keine Lösung besitzt.