Lösung
Lineare Algebra und Numerische Mathematik
Sommer 2011
Prof. Dr. D. Stoffer

---

1. (**a**) Wir erhalten

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline 1 & 1 & -2 & 2 \\ -(b+1) & (a-b) & 2(b-2) & -2 \\ 2 & -(a-1) & a & 4-b \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|ccc|c|}\hline 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & a+1 & -6 & 2b \\ 0 & -a-1 & a+4 & -b \\ \hline \end{array}$$

(**b**) Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

- $a \notin \{-1, 2\}$. In diesem Fall sind alle Diagonalelemente des angegebenen Schemas verschieden von Null. Damit stellt dieses Schema das Endschema des Gauss-Algorithmus dar. Durch Rückwärtssubstitution finden wir die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(2, \frac{2b}{a-2}, \frac{b}{a-2} \right) \right\}.$$

- $a = -1$. Durch Einsetzen in das gegebene Schema und Fortführen der Elimination erhalten wir

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 2b \\ 0 & 0 & -3 & b \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|ccc|c|}\hline 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Somit gibt es einen freien Parameter. Mit der Wahl $y = t \in \mathbb{R}$ ergibt sich als Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ (2 - t - \tfrac{2}{3}b, t, -\tfrac{1}{3}b) : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- $a = 2$. Einsetzen in das gegebene Schema liefert

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ \hline \end{array}.$$

Falls $b \neq 0$ ist die Verträglichkeitsbedingung nicht erfüllt und es gilt

$$\mathcal{L} = \emptyset.$$

Für $b = 0$ wird das Schema zu

$$\begin{array}{|ccc|c|}\hline 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Es gibt also wiederum einen freien Parameter. Wir wählen $z = t \in \mathbb{R}$ und bekommen durch Rückwärtssubstitution die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \big\{(2, 2t, t) : t \in \mathbb{R}\big\}.$$

2. (**a**) Wir bilden zunächst die Ableitung

$$H'(x) = \frac{1}{2\sqrt{c+x}}$$

und setzen diese anschliessend in die Definition der Konditionszahl ein. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\chi_H(x) &= \left|\frac{xH'(x)}{H(x)}\right| \\ &= \frac{x}{2 \cdot \sqrt{c+x} \cdot (\sqrt{c+x} - \sqrt{c})} \\ &= \frac{x \cdot (\sqrt{c+x} + \sqrt{c})}{2 \cdot \sqrt{c+x} \cdot [(c+x) - c]} \\ &= \frac{\sqrt{c+x} + \sqrt{c}}{2 \cdot \sqrt{c+x}}.\end{aligned}$$

(**b**) Wegen $0 < \sqrt{c} \leq \sqrt{c+x}$ gilt

$$\frac{1}{2} < \underbrace{\frac{\sqrt{c+x} + \sqrt{c}}{2 \cdot \sqrt{c+x}}}_{=\chi_H(x)} \leq 1.$$

Insbesondere gilt $\lim_{x \to 0} \chi_H(x) = 1$ und $\lim_{x \to \infty} \chi_H(x) = \frac{1}{2}$. Das Problem ist demnach für alle $x \geq 0$ gut konditioniert.

(**c**) Es gilt

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)} = \frac{\sqrt{\lambda_{\max}(A^\mathsf{T} A)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(A^\mathsf{T} A)}}.$$

Wir bestimmen also die Eigenwerte von

$$A^\mathsf{T} A = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\begin{aligned}p(\lambda) &= \det(\lambda I - A^\mathsf{T} A) = [\lambda - (a^2 + b^2)]^2 - (2ab)^2 \\ &= \lambda^2 - 2(a^2 + b^2)\lambda + (a^2 + b^2)^2 - (2ab)^2.\end{aligned}$$

Wir erhalten daraus die Eigenwerte

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2+b^2)^2 - [(a^2+b^2)^2 - (2ab)^2]} \\ &= a^2 + b^2 \pm 2ab = (a \pm b)^2\end{aligned}$$

und damit

$$\kappa(A) = \frac{a+b}{|a-b|}.$$

3. (**a**) Es gilt

$$\begin{aligned}\det(A) &= -2(a-1)\cdot 2a \cdot (a+2) + 2(a-1)\cdot(a-1)\cdot(a+2) \\ &= -2(a-1)\cdot[2a^2 + 4a - a^2 - a + 2] \\ &= -2(a-1)\cdot[a^2 + 3a + 2] \\ &= -2(a-1)(a+1)(a+2).\end{aligned}$$

(**b**) Wegen

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist der gegebene Vektor v ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert 3. Der Vektor w hingegen ist kein Eigenvektor, denn

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist offenbar kein Vielfaches von w.

(**c**) Mit $a = 1$ erhält man die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\begin{aligned}p_A(\lambda) &= \det(\lambda I - A) = \lambda\cdot(\lambda-3)\cdot(\lambda-3) - \lambda\cdot(-2)\cdot(-2) \\ &= \lambda\cdot(\lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4) = \lambda\cdot(\lambda^2 - 6\lambda + 5) \\ &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-5).\end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind somit 0, 1 und 5.

4. Wir schreiben den Funktionalen Zusammenhang $T_i = ax_i + by_i + cz_i$, $i = 1, \ldots, 6$ als überbestimmtes lineares Gleichungssystem $Au \approx v$ mit

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Normalengleichung lautet $A^\mathsf{T} A u = A^\mathsf{T} v$ mit

$$A^\mathsf{T} A = \begin{pmatrix} 8 & -8 & -4 \\ -8 & 20 & 8 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A^\mathsf{T} v = \begin{pmatrix} 16 \\ -32 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Durch Anwendung des Gauss-Algorithmus erhalten wir

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 8 & -8 & -4 & 16 \\ -8 & 20 & 8 & -32 \\ -4 & 8 & 4 & -12 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 8 & 4 & -12 \\ 0 & 8 & 4 & -8 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -4 & 8 & 4 & -12 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right]$$

und schliesslich durch Rückwärtssubstitution die Lösung

$$c = 2, \qquad b = -2, \qquad a = -\frac{1}{4}\big(-12 + 8 \cdot 2 - 4 \cdot 2\big) = 1.$$

5. **(b)** Die Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems bleiben beschränkt für $t \to \infty$, wenn der Realteil aller Eigenwerte der Matrix A nicht-positiv ist. Wir bestimmen daher die Eigenwerte der Matrix A. Das charakteristische Polynom lautet

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda + 2) \cdot \lambda - (a - 1) = \lambda^2 + 2\lambda - a + 1.$$

Die Eigenwerte sind daher gegeben durch

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + a - 1} = -1 \pm \sqrt{a}.$$

Wir untersuchen nun, für welche reellen a der Realteil beider Eigenwerte nicht-positiv ist. Da a im Radikand der Wurzel auftaucht, führen wir eine Fallunterscheidung bezüglich seines Vorzeichens durch.

Für $a > 0$ sind die Wurzel und damit beide Eigenwerte reell. Es gilt $-1 \pm \sqrt{a} \leq 0$ genau dann, wenn $a \leq 1$.

Falls $a < 0$, wird die Wurzel imaginär und somit $\Re(\lambda_{1,2}) = -1 \leq 0$.

Zusammenfassend bleiben die Lösungen also beschränkt für $a \leq 1$.

(a) Nach unseren bisherigen Überlegungen sind die Eigenwerte von A im Fall $a = 1$ gegeben durch $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 0$. Wir bestimmen nun mittels Gauss-Algorithmus die zugehörigen Eigenvektoren:

- $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{array}{|cc|c|}\hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|cc|c|}\hline 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow x_1 = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\lambda_2 = 0$:

$$\begin{array}{|cc|c|}\hline 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|cc|c|}\hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow x_2 = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit können wir nun A diagonalisieren: $T^{-1}AT = D$ mit

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir multiplizieren nun die Differentialgleichung von links mit T^{-1} und setzen $x =: Ty$. Dadurch erhalten wir das entkoppelte System $\dot{y} = Dy$ mit der Lösung

$$y(t) = \begin{pmatrix} C_1 \mathrm{e}^{-2t} \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Rücksubstitution liefert schliesslich die allgemeine Lösung

$$x(t) = Ty(t) = \begin{pmatrix} 2C_1 \mathrm{e}^{-2t} \\ C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \end{pmatrix}.$$

6. **(a)** Da wir im Folgenden häufig lineare Gleichungssysteme mit der Systemmatrix A lösen müssen, berechnen wir zunächst mit Hilfe des Gauss-Algorithmus eine LR-Zerlegung von A:

$$\begin{array}{|cc|}\hline 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{|cc|}\hline 2 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{|c|}{\frac{1}{2}} & \frac{3}{2} \\ \hline \end{array}$$

Wir erhalten $A = LR$ mit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Der Startwert $x^{(0)}$ ist nun die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax^{(0)} = b$. Durch Vorwärts- und Rückwärtssubstitution mit der gefundenen LR-Zerlegung von A ergibt sich

$$LRx^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rx^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$x^{(1)}$ ergibt sich anschliessend als Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax^{(1)} = b + \varepsilon f(x^{(0)})$. Mit

$$b + \varepsilon f(x^{(0)}) = \begin{pmatrix} -1.4112 \cdot 10^{-2} \\ 3.0000 \end{pmatrix}$$

erhalten wir wiederum durch Vorwärts- / Rückwärtssubstitution

$$LRx^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.4112 \cdot 10^{-2} \\ 3.0000 \end{pmatrix} \Rightarrow Rx^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.4112 \cdot 10^{-2} \\ 3.0071 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{pmatrix} -1.0094 \\ 2.0047 \end{pmatrix}.$$

Schliesslich ergibt sich $x^{(2)}$ als Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax^{(2)} = b + \varepsilon f(x^{(1)})$. Wegen

$$b + \varepsilon f(x^{(1)}) = \begin{pmatrix} -1.2715 \cdot 10^{-2} \\ 3.0000 \end{pmatrix}$$

liefert erneute Vorwärts / Rückwärtssubstitution

$$LRx^{(2)} = \begin{pmatrix} -1.2715 \cdot 10^{-2} \\ 3.0000 \end{pmatrix} \Rightarrow Rx^{(2)} = \begin{pmatrix} -1.2715 \cdot 10^{-2} \\ 3.0064 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(2)} = \begin{pmatrix} -1.0085 \\ 2.0043 \end{pmatrix}.$$

(b) Zunächst stellen wir fest, dass es sich bei dem beschriebenen iterativen Verfahren um eine Fixpunktiteration der Form $x^{(k)} = F(x^{(k-1)})$ mit $F(x) = A^{-1}(b + \varepsilon f(x))$ handelt.

(c) Für die Ableitung von F gilt $\mathrm{D}F(x) = \varepsilon A^{-1}\mathrm{D}f(x)$. Weiterhin finden wir

$$\mathrm{D}f(x) = \begin{pmatrix} \cos(x_1 - x_2) & -\cos(x_1 - x_2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \cos(x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vorwärts- / Rückwärtssubstitution mit der unter **(a)** berechneten LR-Zerlegung von A liefert

$$\begin{aligned} LR \cdot \mathrm{D}F(x) &= \varepsilon \cos(x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow R \cdot \mathrm{D}F(x) &= \varepsilon \cos(x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathrm{D}F(x) &= \varepsilon \cos(x_1 - x_2) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{3} \cos(x_1 - x_2) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Falls $\|\mathrm{D}F(x)\| \le q < 1$ für alle x, können wir den Fehler gegenüber der exakten Lösung x^* daher mittels der bekannten Ungleichung

$$\|x^{(k)} - x^*\| \le \frac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

abschätzen. Wir schätzen nun die Euklidische Matrixnorm von $\mathrm{D}F(x)$ ab. Es gilt

$$\|\mathrm{D}F(x)\|_2 = \frac{\varepsilon}{3} \underbrace{|\cos(x_1 - x_2)|}_{\le 1} \left\| \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\|_2 \le \frac{\varepsilon}{3} \left\| \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\|_2 =: q$$

Es bleibt also die Euklidische Norm der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) =: M$ zu berechnen. Bekanntlich ist $\|M\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(M^\mathsf{T} M)}$. Wir berechnen also die Eigenwerte von

$$M^\mathsf{T} M = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$p_M(\lambda) = \det(\lambda I - M) = (\lambda - 5)^2 - (-5)^2 = \lambda^2 - 10\lambda = \lambda(\lambda - 10).$$

$M^\mathsf{T} M$ besitzt folglich die Eigenwerte 0 und 10 und somit $\|M\|_2 = \sqrt{10}$. Damit erhalten wir $q = \frac{0.1\sqrt{10}}{3} \approx 0.1054$ und können folgendermassen abschätzen:

$$\|x^{(2)} - x^*\|_2 \leq \frac{q^2}{1-q}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_2 \approx 1.3053 \cdot 10^{-4}.$$

Darüber hinaus kann auch die Ungleichung

$$\|x^{(2)} - x^*\| \leq \frac{q}{1-q}\|x^{(2)} - x^{(1)}\|$$

zur Abschätzung verwendet werden. Damit erhalten wir

$$\|x^{(2)} - x^*\|_2 \leq \frac{q}{1-q}\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_2 \approx 1.1605 \cdot 10^{-4}$$